

## **Техничко решење**

# **Развој и имплементација софтвера за ефикасан прорачун директне динамике робота - ERFD (Effective Robot Forward Dynamics)**

**Аутори:**

**Владимир Квргић, Јелена Видаковић**

**Година: 2020.**

**Корисник:**

Научна заједница увидом у рад у часопису категорије M21: Kvrđić, Vladimir, Vidaković, Jelena. "Efficient method for robot forward dynamics computation." Mechanism and Machine Theory 145 (2020): 103680, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.103680

**Начин коришћења:**

Софтвер за прорачун директне динамике универзалног индустријског робота са серијском кинематиком са више степени слободe базиран на новом рачунски-ефикасном и једноставним за примену алгоритму за прорачун директне динамике робота - ERFD. Софтвер ERFD се имплементира у оквиру система за програмирање, управљање и виртуелну симулацију рада роботских система где омогућава верификацију програмираних путања робота и веродостојну симулацију кретања роботских система у реалном времену.

**Рецензенти:**

## ТЕХНИЧКО РЕШЕЊЕ

<b>Назив</b>	Развој и имплементација софтвера за ефикасан прорачун директне динамике робота - ERFD
<b>Аутори</b>	Владимир Квргић (Институт Михајло Пупин, Универзитет у Београду), Јелена Видаковић (Јола Институт, Београд)
<b>Категорија</b>	Ново техничко решење (метода) примењено на међународном нивоу (M81) Доказ: Рад у часопису категорије M21: Kvrgic, Vladimir, Vidakovic, Јелена. "Efficient method for robot forward dynamics computation." Mechanism and Machine Theory 145 (2020): 103680, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.103680, Прилог 1
<b>Кључне речи</b>	Роботика, Виртуелна симулација робота, Динамика робота, Рекурзивни Њутн-Ојлер алгоритам

<b>За кога је решење рађено (правно лице или грана привреде):</b>
Техничко решење је рађено за потребе истраживачке заједнице и индустрије у домену управљања и симулације индустријских робота
<b>Година када је решење комплетирано:</b>
2020.
<b>Година када је почело да се примењује и од кога:</b>
Примена техничког решења је почела у 2020. Корисник: Научна заједница увидом у рад у часопису категорије M21
<b>Област и научна дисциплина на коју се техничко решење односи:</b>
Техничко-технолошке науке; информационо-комуникационе технологије
<b>Рецензенти техничког решења:</b>
1.

## Технички елаборат:

- Проблем који се техничким решењем решава
- Стање решености тог проблема у свету
- Опис техничког решења са карактеристикама, укључујући пратеће илустрације и техничке цртеже:
  - Нови алгоритам директне динамике робота
  - Имплементација софтвера ERFD
  - Додаци
- Захвалност
- Референце

# ТЕХНИЧКИ ЕЛАБОРАТ

## Проблем који се техничким решењем решава

Симулација рада робота, поред своје основне функције да врши верификацију задатих путања, представља важан сегмент њиховог развоја, тј. развоја механичке структуре, управљачког система и софтвера за програмирање робота. Приликом програмирања индустријских робота тренутно најзаступљенијом методом програмирања - програмирање учењем, производна линија стаје, што доводи до значајног губитка новца. Дуготрајан процес програмирања робота, који захтева техничку обученост и експертизу, представља главну препреку за увођење робота у производне процесе малих и средњих предузећа [1]. Стога офлаин програмирања робота са поузданим системом за симулацију рада робота представља веома атрактивно решење које доводи до уштеде у времену и новцу у производним процесима у којима учествују индустријски работи. Од великог значаја је и постојање могућности удаљеног праћења рада машине у реалном времену. За потребе високе тачности, ради тестирања и верификације, симулација роботског система мора да узме у обзир динамички модел, што је веома комплексан задатак с обзиром на нестационарни, вишестуко-преносни, нелинеарни динамички модел робота, који зависи од тренутне конфигурације робота, брзина и убрзања кретања његових чланова, као и од променљивог терета.

Имплементација динамичког модела је од посебног значаја за управљање и симулацију робота високих перформанси, тј. робота који постижу велике брзине. Два основна задатка у динамици робота су решавање директног и инверзног динамичког задатка. Инверзни динамички задатак подразумева одређивање покретачких момената у зглобовима на основу задатих трајекторија (позиција, брзина и убрзања) зглобова робота. Директни динамички задатак се односи на одређивање трајекторија зглобова робота за улазне вредности момената у зглобовима. Док се решење проблема инверзне динамике робота (ИД) користи за потребе управљања, решење проблема директне динамике (ДД) се до сада користило углавном за потребе симулације рада робота. Два тренутно највећа изазова за увођење динамичког модела робота у решавање проблема управљања и симулације су: 1) велика рачунска сложеност конвенционалних метода за моделирање динамичког модела и 2) сложеност примене постојећих метода на роботе са више степени слободе кретања.

Рекурзивни Њутн-Ојлер алгоритам (RNEA) је у роботској литератури прихваћен као рачунски најефикаснији метод за извођење динамичких једначина кретања робота. По досадашњем најраспрострањенијем методу за решавање директног динамичког задатка робота - Walker и Orin WO1 методу, неопходно је да се RNEA алгоритам изврши  $n + 1$  пута за сваки период интерполације ( $\Delta t$ ) управљачког система, где је  $n$  број степени слободе кретања. Ово изискује изузетно велики број рачунских операција, због чега је до релативно скоро било немогуће користити ове алгоритме за потребе управљања и симулације рада робота у реалном времену.

У овом техничком решењу описан је развој алгоритма и софтвера за ефикасан прорачун ДД робота и његова софтверска имплементација у интегрисани систем за управљање, симулацију и удаљено праћење рада робота L-RC (Лола робот контролер). L-RC користи роботски језик L-IRL (Lola Industrial Robot Language). Овај управљачки систем је унапређен увођењем ДД у планер путање (трајекторије) робота. Планер путање је

примарни део софтвера за управљање кретањем робота у оквиру робот контролера. Његов излаз представља улаз у сервоконтролере погона робота. Планер путање је и део система за симулацију кретања робота.

Нови рачунски ефикасан и једноставан за имплементацију метод за прорачун ДД робота користи развијени Модификовани Рекурзивни Њутн-Ојлеров алгоритам (mRNEA) за решавање директног динамичког задатка само једном у току једног периода интерполације. Метод базиран на mRNEA је најједноставнији за примену и рачунски најефикаснији метод од свих постојећих метода за решавање директне динамике робота. Рачунска ефикасност представљених ИД и ДД алгоритма за роботе отвореног кинематичког ланца постигнута је новим начином дискретизације једначина кретања, а додатно је унапређена чињеницом да није неопходан прорачун момената у зглобовима који се користе као улаз у алгоритам ДД (за разлику од других метода), те се самим тим број рачунских операција значајно смањује.

Представљени метод за решавање директног динамичког задатка базиран на mRNEA је значајан је за потребе симулације и управљања робота. У погледу симулације роботских система, овај метод даје есенцијални допринос за остваривање веродостојне симулације кретања робота, како у офлајн режиму, тако и у реалном времену из следећих разлога: 1) рачунска ефикасност, која је посебно значајна са аспекта симулације рада робота у реалном времену; 2) омогућавање реалистичне (тачне и изводљиве) симулације кретања робота на основу развијеног алгоритма који израчунава остварива убрзања зглобова робота узимајући у обзир максималне моменте/силе које мотори могу да остваре (Алгоритам 1), за разлику од других, до сада представљених метода.

Предложени mRNEA, његова примена у оквиру алгоритма ДД, као и ефикасност представљених алгоритма су испитане и демонстриране на 6-осном серијском роботу. За развој динамичког модела робота, на основу кога се врши симулација његовог кретања развијен је 3Д модел робота у CAE (Computer-aided engineering) софтверу (графичка симулација рада робота није део предложеног техничког решења). Представљени алгоритми су преточени у софтверску апликацију ERFD која је написана у C++ језику. Софтвер ERFD се имплементира у оквиру система за програмирање, управљање, симулацију и удаљено праћење рада роботских система где омогућава како верификацију програмираних путања робота, тако и веродостојну симулацију кретања роботских система у реалном времену. Осим као део система за програмирање, управљање, симулацију и удаљено праћење кретања робота, ERFD се може користити и као самостални софтвер за прорачун ДД робота и система крутих тела са више степени слободе за различите примене.

### Стање решености тог проблема у свету:

Последњих неколико деценија у роботизици обележила су значајна истраживања везана за сложеност израчунавања динамичких модела робота у оквиру пројектовања механичке структуре, развоја управљачких и симулационих система за роботе високих перформанси, као и општено за системе крутих тела.

Лагранжова формулација једначина кретања робота (ЛФ) је веома значајна с обзиром да даје експлицитно  $n \times n$  матрицу инерције  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ , и offset вектор  $\mathbf{u}'$ , који означава допринос вектору момената у зглобовима робота који није функција убрзања зглобова робота

$\ddot{\mathbf{q}}=\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$  [2–10]. Овај метод се до скора, услед ограничених могућности рачунара, углавном користио за роботе где је број степени слободe  $n \leq 3$ , због високе рачунске сложености алгорита- $O(n^4)$ . Познато је да се оптимална рачунска сложеност динамичког модела робота добија употребом рекурзије [3]. Рекурзивни ЛФ алгорита који је развијен у [11] остварује рачунску сложеност  $O(n^3)$ . Рекурзивни Њутн-Ојлеров метод се показао као рачунски веома ефикасан за решење инверзног динамичког задатка робота. Његова рачунска сложеност је  $O(n)$ . RNEA метод који је развијен у [12] је независан од роботске конфигурације.

За решавање директног динамичког задатка робота, најпознатије су 4 методе развијене од стране Walker и Orin-a (WO1-4), чија је рачунска сложеност  $O(n^2)$ , а који су базирани на RNEA алгоритмима. Најједноставнија и најприхваћенија ДД метода до сада присутна у литератури је WO1 метода. Рачунски најефикаснија је WO3 метода позната још као и Composite-Rigid-Body Algorithm (CRBA). Међутим, иако рачунски ефикасна, ова метода је изузетно тешка за примену на универзалном роботу који има више степени слободe кретања [2,10,13]. Остали значајни радови из области ДД алгоритама су дати у [14]. С обзиром на убрзани развој рачунара, једноставност примене алгорита (на нови робот) постаје једнако битна, ако не и битнија од особине рачунске сложености алгорита.

Модификовани Рекурзивни Њутн-Ојлеров Алгорита (mRNEA), који је овде презентован, је развијен за потребе решавање директног динамичког задатка робота. Рачунска сложеност ДД алгорита базираног на mRNEA је  $O(n)$ . За број степени слободe  $n=3, 4, 5, 6$  у Табели 1 је дат број рачунских операција за представљени ДД алгорита. Поређење рачунске сложености развијеног ДД метода са најзначајнијим до сада представљеним методама у литератури је дата у Табели 2. У Табели 1 и Табели 2, М је ознака за множење/дељење, а А је ознака за сабирање/одузимање. ДД метод базиран на mRNEA алгоритму, осим што је рачунски најефикаснији од свих развијених метода, једноставан је за примену. Осим тога, mRNEA даје матрицу инерције  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  и офсет вектор  $\mathbf{u}'$  у експлицитном облику, што је значајно, јер омогућава решавање убрзања чланова робота кроз решавање система линеарних једначина.

Табела 1

Рачунска сложеност развијеног  $O(n)$  ДД алгорита за различите бројеве степени слободe.

$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
241M 188A	484M 376A	854M 662A	1356M 1038A

Табела 2

Број рачунских операција за ДД алгорита за робот са 6 степени слободe.

Метода	Множење	Сабирање
Walker and Orin's method 1 (1982) [6,7]	3418	2502
Walker and Orin's method 2 (1982) [6,7]	2308	1692
Walker and Orin's method 3 (1982) [6,7]	1627	1255
Featherstone (1983) [15]	2190	1915
Saha – based on DeNOC (2003) [16]	2008	1919
Mohan and Saha– based on DeNOC (2007) [17]	1948	1667
<b>ДД базиран на mRNEA</b>	<b>1356</b>	<b>1038</b>

Укључивање динамичког модела је неопходно за исправну симулацију рада робота, а

уједно и највећи изазов при развоју система симулације рада робота. Тренутно на тржишту постоје софтвери за симулацију рада робота чија је лиценца власничког типа (*proprietary license, енг.*), или типа отвореног кода (*open-source, енг.*). Велики произвођачи робота развијају сопствене софтверске системе за симулацију рада робота. Познати примери ових софтвера укључују АВВ RobotStudio [18], FANUC Roboguide [19] итд. Ови софтвери се добијају уз власничку лиценцу чија је цена значајна, и цео или највећи део софтвера је затвореног типа, тако да се не може приступити динамичком моделу робота уколико је он имплементиран у управљање или симулацију рада. Отворени код у софтверским системима за управљање, програмирање и симулацију рада робота има многе предности које кориснику омогућавају модификацију по сопственим потребама и остваривање напредних могућности програмирања (нпр. остваривање оптималних путања робота по потрошњи електричне енергије и слично). Додатни проблем при употреби власничких софтвера настаје ако се у производној линији налазе роботи различитих произвођача, који, као и новије верзије симулационих система, често не могу да се повежу са старијим контролерима. Од постојећих *open-source* софтвера за симулацију рада робота, најпознатији су Gazebo simulator [20], Webots [21], итд. Ови системи имају моделе за неке одређене индустријске роботе или омогућавају развој сопствених модела различитих тачности. Уколико врше имплементацију динамичког модела, ови софтвери се углавном ослањају на спољне библиотеке тзв. *Multibody Dynamic Engines*. Нпр. Gazebo simulator користи Simbody [22], DART [23] и друге библиотеке, које су базиране на Featherstone's Articulated Body Algorithm алгоритму [24].

Софтвер ERFD који је овде приказан је базиран на mRNEA алгоритму који је рачунски до сада најефикаснији метод за решавање директног динамичког задатка робота, те самим тим омогућава значајно боље перформансе система у реалном времену. Његова друга предност је то што узима у обзир реалне могућности мотора, за разлику од других софтвера отвореног кода, те остварује тачну симулацију на основу остваривих трајекторија робота. Софтвер ERFD је развијан са намером да буде у складу са парадигмом отвореног кода.

**Опис техничког решења са карактеристикама, укључујући пратеће илустрације и техничке цртеже**

### **Нови алгоритам директне динамике робота**

Ради нумеричке имплементације у дискретне симулационе и управљачке системе, једначина кретања робота се мора дискретизовати. Алгоритам ДД рачуна убрзања зглобова  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$  у временским тренуцима  $t_k$ , и на основу њих брзине за следећи период интерполације  $\dot{\mathbf{q}}(t_{k+1})$ , и позиције зглобова  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  на крају следећег периода интерполације. Улази у ДД алгоритам су моменти којима мотори делују у зглобовима - вектор  $\mathbf{u}(t_k)$ ; инерцијалне, гравитационе, и Кориолисове силе које делују на чланове робота; силе и моменти који делују на енд-ефектор; силе и моменти трења у зглобовима. Након израчунавања  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$ , брзина  $\dot{\mathbf{q}}(t_{k+1})$  и позиција  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  за тренутак  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$  се добијају нумеричком интеграцијом (са интеграционим кораком  $\Delta t$ ).

Алгоритам ИД робота са  $n$  степени слободе добија се решавањем по моментима система

једначина који представљају динамички модел робота у координатама зглобова:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{k}_e = \mathbf{u}, \quad (1)$$

где су  $\ddot{\mathbf{q}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{q}$   $n \times 1$  вектори убрзања, брзина и позиција зглобова робота, следствено;  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  је  $n \times n$  матрица Кориолисових и центрифугалних ефеката;  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  је  $n \times 1$  вектор утицаја гравитације;  $\mathbf{k}_e$  је  $6 \times 1$  вектор спољашњих сила и момената које делују на члан  $n$ ;  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  је  $6 \times n$  Јакобијан матрица; и  $\mathbf{u}$  је  $n \times 1$  вектор улазних сила/момената у зглобовима. Дијагонални чланови матрице инерције  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  се односе на инерције одговарајућих степена слободе, док остали чланови ове матрице представљају комбиноване инерције појединих чланова робота [5].

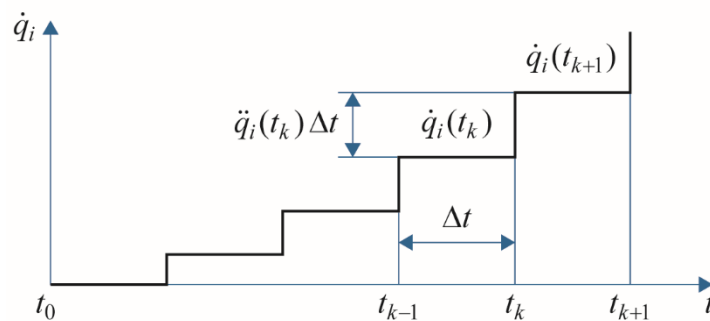
Када су познате вредности  $\mathbf{q}(t_k)$  и  $\dot{\mathbf{q}}(t_k)$  у једначини (1), моменти/силе у зглобовима су линеарне функције убрзања  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$  у току периода интерполације придруженом тренутку  $t_k$ . Применом ЛФ се у експлицитном облику добијају матрица  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  и вектори  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  и  $\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{k}_e$ , тако да се убрзања  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$  могу добити решавањем система од  $n$  линеарних једначина:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_e), \quad (2)$$

$$\mathbf{u}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_e) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{k}_e. \quad (3)$$

### Предложен приступ

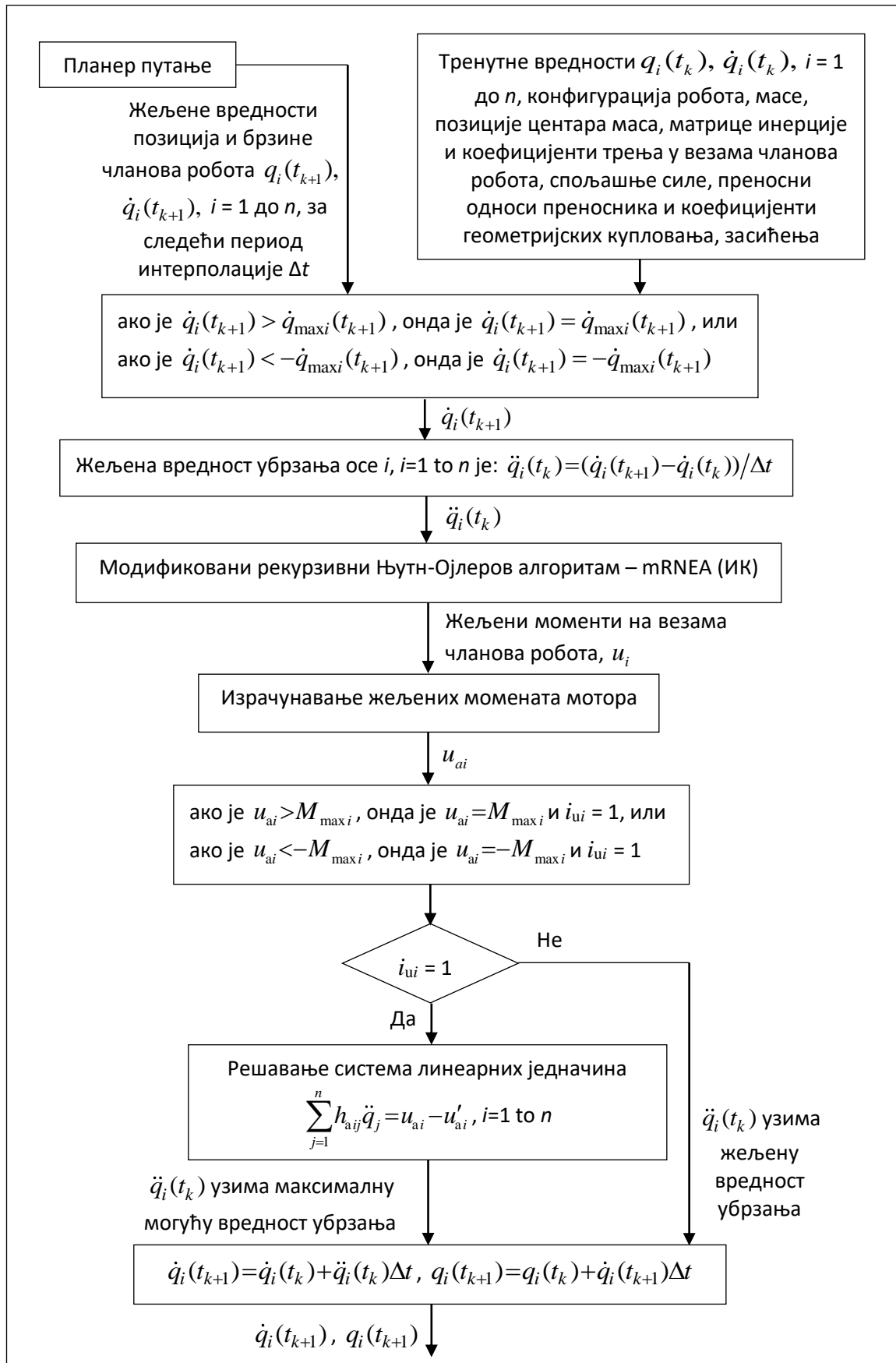
Планер путање робот контролера прима команде о жељеним кретањима робота датих у програму који је дефинисао корисник и трансформисе их у низ узастопних позиција зглобова/актуатора робота. Ове позиције се шаљу серво контролерима у констатним временским размацима  $\Delta t$ . С обзиром да је период интерполације савремених робот контролера веома кратак (најчешће се креће 0,003-0,01s), брзине зглобова/актуатора  $\dot{q}_i(t_k) = (q_i(t_{k+1}) - q_i(t_k)) / \Delta t$ , се сматрају констатним у току једног периода интерполације, и оне су пропорционалне задатим позицијама за временски тренутак  $t_k$ . На основу овога се задате брзине зглобова могу усвојити за улазе у серво контролере. С обзиром да су тренутна брзина  $\dot{q}_i(t_k)$  и жељена вредност убрзања  $\ddot{q}_i(t_k)$  познате, брзина зглоба  $i$  у наредном периоду интерполације је  $\dot{q}_i(t_{k+1}) = \dot{q}_i(t_k) + \ddot{q}_i(t_k) \Delta t$ , слика 1.



Слика 1. Прорачун жељене брзине везе  $i$  робота

У класичним симулационим системима, ДД прво израчунава offset вектор  $\mathbf{u}'$  решавањем ИД задатка (најчешће помоћу RNEA). Након тога, ДД формира матрицу  $\mathbf{H}$ , најчешће решавањем ИД помоћу RNEA  $n$  пута (WO метода 1). У следећем кораку, симулациони систем рачуна вектор  $\mathbf{u}$  (који је улаз у ДД алгоритам) решавајући ИД тако да зглобови робота достижу своје задате позиције  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  на крају интерполационог периода (слика 1). Ове позиције се рачунају у планеру путање. Коначно, ДД решава систем од  $n$  (линеарних) једначина (2) да би добио  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$ . У литератури је наведено да применом до сада најзаступљенијих приступа, симулациони систем робота мора да реши ИД  $n + 2$  пута у току сваког интерполационог периода.

Новим методом, који је овде описан, једначина (2) се добија експлицитно помоћу mRNEA алгоритма. Презентовани алгоритам израчунава  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$  извршавањем процедуре mRNEA само једном. Развијени ДД алгоритам користи: 1) тренутне вредности  $\mathbf{q}(t_k)$  и  $\dot{\mathbf{q}}(t_k)$ ; 2) жељене вредности  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  и  $\dot{\mathbf{q}}(t_{k+1})$  из планера путање; 3) вектор  $\mathbf{k}_e$ . Прво се испитује да ли се захтеване позиције и брзине могу остварити. Ако не, њихове вредности се лимитирају на оствариве вредности и након тога се рачунају захтевана убрзања  $\ddot{q}_i(t_k) = (\dot{q}_i(t_{k+1}) - \dot{q}_i(t_k)) / \Delta t$ . Затим mRNEA рачуна силе/моменте зглобова којима је потребно покретати чланове да би се остварило жељено кретање-вектор  $\mathbf{u}$ . При томе се добијају у експлицитној форми offset вектор  $\mathbf{u}'$  и матрица инерције  $\mathbf{H}$ , тако да је могуће извршити инверзни задатак - решавање убрзања чланова робота на основу вредности момената у зглобовима (ДД алгоритам) једноставним решавањем система линеарних једначина (за сваки период интерполације), што је од есецијалне важности за остваривање рачунске ефикасности ДД алгоритма и самим тим његове примене за потребе симулације рада робота у реалном времену. У следећем кораку (након извршења ИД алгоритма), алгоритам лимитира моменте мотора узимајући у обзир могућности (засићење) мотора - из вектора  $\mathbf{u}$  добија се вектор  $\mathbf{u}_a$  (недостижни моменти/силе се замењују максималним/минималним могућим како би се прорачуном ДД добиле вредности убрзања која су достижна). На овај начин, у оквиру симулационог система, као и приликом програмирања и управљања робота, само достижне брзине и позиције мотора се добијају из планера путање за сваки период интерполације. Последице, реалне вредности брзина и убрзања се користе у прорачуну сила и момената у зглобовима при развоју механичке структуре. Тиме је такође омогућен и исправан прорачун улежиштења чланова робота. Описани алгоритам је овде означен као Алгоритам 1. На слици 2 приказан је дијаграм тока израчунавања о овом алгоритму.



Слика 2. Дијаграм тока израчунавања у Алгоритму 1.

## Нови ДД алгоритам базиран на mRNEA

У наставку је описан ДД алгоритам базиран на mRNEA за отворени кинематички ланац са  $n$  степени слободе.

$4 \times 4$  матрица хомогене трансформације координата (МХТ) која трансформише координате тачке дате у координатном систему (КС)  $j$  у координате КС  $i$  је означена са  ${}^j\mathbf{T}_i$ , а из базног КС у КС  $i$  са  $\mathbf{T}_i$ . Матрица  ${}^j\mathbf{T}_i$  садржи  $3 \times 3$  матрицу оријентације  ${}^j\mathbf{D}_i = [{}^j\mathbf{x}_i \ {}^j\mathbf{y}_i \ {}^j\mathbf{z}_i]$  и  $3 \times 1$  вектор позиције  ${}^j\mathbf{p}_i$ .

Линеарно убрзање центра масе члана  $i$  је:

$$\dot{\mathbf{v}}_i^{\text{cm}} = [\dot{v}_{xi}^{\text{cm}} \ \dot{v}_{yi}^{\text{cm}} \ \dot{v}_{zi}^{\text{cm}}]^T = \dot{\mathbf{v}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_i^{\text{cm}} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i^{\text{cm}}), \quad (4)$$

где је  $\mathbf{r}_i^{\text{cm}} = [r_{xi}^{\text{cm}} \ r_{yi}^{\text{cm}} \ r_{zi}^{\text{cm}}]^T = [r_{xi} \ r_{yi} \ r_{zi}]^T = \mathbf{D}_i \hat{\mathbf{r}}_i^{\text{cm}}$  вектор позиције центра масе члана  $i$  у односу на КС везан за члан  $i$  изражен у координатама базног КС. Овај вектор у КС везаном за члан  $i$  је означен са  $\hat{\mathbf{r}}_i^{\text{cm}} = [\hat{r}_{xi} \ \hat{r}_{yi} \ \hat{r}_{zi}]^T$ . Са  $\times$  је означен векторски производ, а  $\boldsymbol{\omega}_i$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$  и  $\dot{\mathbf{v}}_i$  су дати у Додатку Б. Једначина (4) се може написати у следећем облику

$$\dot{\mathbf{v}}_i^{\text{cm}} = \sum_{k=1}^i \mathbf{b}_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \mathbf{b}_{ikj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad i = 1 \text{ to } n, \quad (5)$$

где су  $\mathbf{b}_{ik}$  и  $\mathbf{b}_{ikj}$   $3 \times 1$  вектори. Укупна сила  $\mathbf{F}_i$  и укупни момент  $\mathbf{N}_i$  који делују на члан  $i$ , се добијају из Њутн-Ојлерових једначина

$$\mathbf{F}_i = [F_{xi} \ F_{yi} \ F_{zi}]^T = m_i [\dot{v}_{xi}^{\text{cm}} \ \dot{v}_{yi}^{\text{cm}} \ \dot{v}_{zi}^{\text{cm}} - g]^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{N}_i = [N_{xi} \ N_{yi} \ N_{zi}]^T = \mathbf{I}_i^{\text{cm}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i^{\text{cm}} \boldsymbol{\omega}_i). \quad (7)$$

Маса члана  $i$  је означена са  $m_i$ ,  $g$  је убрзање Земљине теже, а  $\mathbf{I}_i^{\text{cm}}$  је  $3 \times 3$  матрица инерције члана  $i$  у односу на центар масе тог члана изражена у координатама базног КС. Из једначина (5) и (6) се добија:

$$\mathbf{F}_i = m_i ([0 \ 0 \ -g]^T + \sum_{k=1}^i \mathbf{b}_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \mathbf{b}_{ikj} \dot{q}_k \dot{q}_j), \quad i = 1 \text{ to } n. \quad (8)$$

Једначина (7) се може написати у следећем облику:

$$\mathbf{N}_i = \sum_{k=1}^i \mathbf{d}_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \mathbf{d}_{ikj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad i = 1 \text{ to } n, \quad (9)$$

где су  $\mathbf{d}_{ik}$  и  $\mathbf{d}_{ikj}$   $3 \times 1$  вектори. Ефекти спољашњих сила и момената,  $\mathbf{k}_e^T = [\mathbf{f}_e \ \mathbf{n}_e]^T$ , који делују на енд-ефектор се добијају из добро познатих једначина:

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{f}_e, \quad (10)$$

$$\mathbf{n}_n = \mathbf{N}_i + \mathbf{n}_e + \begin{bmatrix} p_{ey}f_{ez} - p_{ez}f_{ey} & p_{ez}f_{ex} - p_{ex}f_{ez} & p_{ex}f_{ey} - p_{ey}f_{ex} \end{bmatrix}^T, \quad (11)$$

где је  $\mathbf{p}_e = [p_{ex} \ p_{ey} \ p_{ez}]^T = \mathbf{D}_n \hat{\mathbf{p}}_e$  вектор спољашње силе која делује на енд-ефектор у односу на координатни почетак везан за члан  $n$  изражен у координатама базног КС. Овај вектор у координатама КС везаног за члан  $n$  је  $\hat{\mathbf{p}}_e = [\hat{p}_{ex} \ \hat{p}_{ey} \ \hat{p}_{ez}]^T$ . Из једначина (8) и (10) се добија:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{e}_i + \sum_{k=1}^i \mathbf{e}_{ik} \ddot{q}_k, \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_i = m_i ([0 \ 0 \ -g]^T + \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \mathbf{b}_{ikj} \dot{q}_k \dot{q}_j), \quad i = 1 \text{ to } n-1, \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_n = m_n ([0 \ 0 \ -g]^T + \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \mathbf{b}_{nik} \dot{q}_k \dot{q}_j) + \mathbf{f}_e, \quad i = n, \quad (14)$$

$$\mathbf{e}_{ik} = m_i \mathbf{b}_{ik}, \quad i = 1 \text{ to } n. \quad (15)$$

Слично, једначина (9) се може написати у облику

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{d}_i + \sum_{k=1}^i \mathbf{d}_{ik} \ddot{q}_k, \quad (16)$$

$$\mathbf{d}_i = \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \mathbf{d}_{ikj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad i = 1 \text{ до } n. \quad (17)$$

Сила  $\mathbf{f}_i$  и момент  $\mathbf{n}_i$  којим на члан  $i$  делује члан  $i - 1$  изражена у базном КС су:

$$\mathbf{f}_i = [f_{xi} \ f_{yi} \ f_{zi}]^T = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{i+1}, \quad (18)$$

$$\mathbf{n}_i = [n_{xi} \ n_{yi} \ n_{zi}]^T = \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{N}_i + \mathbf{l}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{f}_{i+1}, \quad (19)$$

где је  $\mathbf{l}_i = [l_{xi} \ l_{yi} \ l_{zi}]^T = \mathbf{p}_i^* + \mathbf{r}_i^{\text{cm}}$ ,  $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i$ .

Маса енд-ефектора може бити укључена у масу члана  $n$ . На основу једначина (10)–(19),  $\mathbf{f}_i$  и  $\mathbf{n}_i$  се могу израчунати као:

$$\mathbf{f}_i = \sum_{k=i}^n \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^i \sum_{j=i}^n \mathbf{e}_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=k}^n \mathbf{e}_{jk} \ddot{q}_k, \quad i = n \text{ to } 1, \quad (20)$$

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{d}_i + \sum_{k=1}^i \mathbf{d}_{ik} \ddot{q}_k + \mathbf{l}_i \times (\mathbf{e}_i + \sum_{k=1}^i \mathbf{e}_{ik} \ddot{q}_k) + \mathbf{p}_i^* \times (\sum_{k=i+1}^n \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^{i+1} \sum_{j=i+1}^n \mathbf{e}_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=i+2}^n \sum_{j=k}^n \mathbf{e}_{jk} \ddot{q}_k) \quad (21)$$

$$= \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{n}_{ic} + \mathbf{n}_{ia1} + \mathbf{n}_{ia2} + \mathbf{n}_{ia3}, \quad i = n \text{ to } 1,$$

где су  $\mathbf{n}_{ic}$ ,  $\mathbf{n}_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}_{ia2}$ , и  $\mathbf{n}_{ia3}$   $3 \times 1$  вектори дати у следећим једначинама:

$$\mathbf{n}_{nc} = \mathbf{d}_n + \mathbf{l}_n \times \mathbf{e}_n + \mathbf{p}_{n+1} \times \mathbf{f}_{n+1} = \begin{bmatrix} d_{xn} + l_{yn} e_{zn} - l_{zn} e_{yn} + p_{y(n+1)} f_{z(n+1)} - p_{z(n+1)} f_{y(n+1)} \\ d_{yn} + l_{zn} e_{xn} - l_{xn} e_{zn} + p_{z(n+1)} f_{x(n+1)} - p_{x(n+1)} f_{z(n+1)} \\ d_{zn} + l_{xn} e_{yn} - l_{yn} e_{xn} + p_{x(n+1)} f_{y(n+1)} - p_{y(n+1)} f_{x(n+1)} \end{bmatrix}, i = n, \quad (22)$$

$$\mathbf{n}_{ic} = \mathbf{d}_i + \mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_i + \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{i+1} = \begin{bmatrix} d_{xi} + l_{yi} e_{zi} - l_{zi} e_{yi} + p_{yi}^* E_{z(i+1)} - p_{zi}^* E_{y(i+1)} \\ d_{yi} + l_{zi} e_{xi} - l_{xi} e_{zi} + p_{zi}^* E_{x(i+1)} - p_{xi}^* E_{z(i+1)} \\ d_{zi} + l_{xi} e_{yi} - l_{yi} e_{xi} + p_{xi}^* E_{y(i+1)} - p_{yi}^* E_{x(i+1)} \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{i+1} = \sum_{k=i+1}^n \mathbf{e}_k, i = n-1 \text{ to } 1, \quad (23)$$

$$\mathbf{n}_{ial} = \sum_{k=1}^i (\mathbf{d}_{ik} + \mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_{ik}) \ddot{q}_k = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^i (d_{xik} + l_{yi} e_{zik} - l_{zi} e_{yik}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=1}^i (d_{yik} + l_{zi} e_{xik} - l_{xi} e_{zik}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=1}^i (d_{zik} + l_{xi} e_{yik} - l_{yi} e_{xik}) \ddot{q}_k \end{bmatrix} = [\mathbf{n}_{i1a1} \ \mathbf{n}_{i2a1} \ \dots \ \mathbf{n}_{iia1}] \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix}, i = n \text{ to } 1,$$

$$[\mathbf{n}_{i1a1} \ \mathbf{n}_{i2a1} \ \dots \ \mathbf{n}_{iia1}] = [\mathbf{d}_{i1} + \mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_{i1} \ \mathbf{d}_{i2} + \mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_{i2} \ \dots \ \mathbf{d}_{ii} + \mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_{ii}], \quad (24)$$

$$\mathbf{n}_{ia2} = \mathbf{p}_i^* \times \sum_{k=1}^{i+1} \mathbf{E}_{(i+1)k} \ddot{q}_k = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{i+1} (p_{yi}^* E_{z(i+1)k} - p_{zi}^* E_{y(i+1)k}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=1}^{i+1} (p_{zi}^* E_{x(i+1)k} - p_{xi}^* E_{z(i+1)k}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=1}^{i+1} (p_{xi}^* E_{y(i+1)k} - p_{yi}^* E_{x(i+1)k}) \ddot{q}_k \end{bmatrix} = [\mathbf{n}_{i1a2} \ \mathbf{n}_{i2a2} \ \dots \ \mathbf{n}_{i(i+1)a2}] \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_{i+1} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{n}_{i1a2} \ \mathbf{n}_{i2a2} \ \dots \ \mathbf{n}_{i(i+1)a2}] = [\mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{(i+1)1} \ \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{(i+1)2} \ \dots \ \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{(i+1)(i+1)}],$$

$$\mathbf{E}_{(i+1)k} = \sum_{j=i+1}^n \mathbf{e}_{jk}, i = n-1 \text{ to } 1, \mathbf{n}_{na2} = \mathbf{0}, \quad (25)$$

$$\mathbf{n}_{ia3} = \mathbf{p}_i^* \times \sum_{k=i+2}^n \mathbf{E}_{kk} \ddot{q}_k = \begin{bmatrix} \sum_{k=i+2}^n (p_{yi}^* E_{zkk} - p_{zi}^* E_{ykk}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=i+2}^n (p_{zi}^* E_{xkk} - p_{xi}^* E_{zkk}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=i+2}^n (p_{xi}^* E_{ykk} - p_{yi}^* E_{xkk}) \ddot{q}_k \end{bmatrix} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{n}_{i(i+2)a3} \ \dots \ \mathbf{n}_{ina3}] \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_{i+2} \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{n}_{i(i+2)a3} \ \dots \ \mathbf{n}_{ina3}] = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{(i+2)(i+2)} \ \dots \ \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{in}],$$

$$\mathbf{E}_{kk} = \sum_{j=k}^n \mathbf{e}_{jk}, i = n-2 \text{ to } 1, \mathbf{n}_{na3} = \mathbf{n}_{(n-1)a3} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

Да би се смањило број рачунских операција, вектор  $\mathbf{n}_{i+1}$  се може укључити у векторе  $\mathbf{n}_{ic}$ ,  $\mathbf{n}_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}_{ia2}$  и  $\mathbf{n}_{ia3}$ . На овај начин, једначина (21) се трансформише у:

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}'_{ic} + (\mathbf{n}'_{ia1} + \mathbf{n}'_{ia2} + \mathbf{n}'_{ia3}) \ddot{\mathbf{q}}, \quad i = n \text{ to } 1, \quad (27)$$

где је  $\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \dots \ \ddot{q}_n]^T$   $n \times 1$  вектор,  $\mathbf{n}'_{ic}$  је  $3 \times 1$  вектор, а  $\mathbf{n}'_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia2}$  и  $\mathbf{n}'_{ia3}$  су  $3 \times n$  вектори. Ови вектори су дати следећим једначинама:

$$\mathbf{n}'_{ic} = \mathbf{n}_{(i+1)c} + \mathbf{n}_{ic}, \quad (28)$$

$$\mathbf{n}'_{ia1} = [\mathbf{n}'_{i1a1} \ \mathbf{n}'_{i2a1} \ \dots \ \mathbf{n}'_{ma1}] = \left[ \sum_{k=i}^n (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) \ \sum_{k=i}^n (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \ \dots \ \mathbf{d}_{m1} + \mathbf{l}_n \times \mathbf{e}_{m1} \right], \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{ia2} &= \left[ \sum_{k=i}^{n-1} \mathbf{n}_{k1a2} \ \sum_{k=i}^{n-1} \mathbf{n}_{k2a2} \ \sum_{k=i}^{n-1} \mathbf{n}_{k3a2} \ \sum_{k=i}^{n-1} \mathbf{n}_{k4a2} \ \dots \ \mathbf{n}_{(n-1)(n-1)a2} \right] \\ &= \left[ \sum_{k=i}^{n-1} (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)1}) \ \sum_{k=i}^{n-1} (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)2}) \ \sum_{k=i}^{n-1} (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)3}) \ \sum_{k=i}^{n-1} (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)4}) \ \dots \ \mathbf{n}_{(n-1)(n-1)a2} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathbf{n}'_{ia3} = \left[ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{E}_{33} \ (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^*) \times \mathbf{E}_{44} \ \dots \ \sum_{i=1}^{n-3} \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{(n-1)(n-1)} \ \sum_{i=1}^{n-2} \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{e}_{m1} \right]. \quad (31)$$

Силе и моменти којима на члан  $i$  делује члан  $i - 1$  у координатама члана  $i - 1$  су:

$$\hat{\mathbf{f}}_i = [\hat{f}_{xi} \ \hat{f}_{yi} \ \hat{f}_{zi}]^T = \mathbf{D}_{i-1}^T \mathbf{f}_i \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{n}}_i = [\hat{n}_{xi} \ \hat{n}_{yi} \ \hat{n}_{zi}]^T = \mathbf{D}_{i-1}^T \mathbf{n}_i. \quad (32)$$

Пројекција вектора  $\mathbf{n}_i$  дуж осе ротације/транслације члана  $i$  је:

$$u_i = \mathbf{z}_{i-1}^T \mathbf{n}_i, \quad (33)$$

где је  $\mathbf{z}_{i-1}$  јединични вектор осе ротације/транслације члана  $i$ , који је дат преко прва три елемента треће колоне матрице  $\mathbf{T}_i$ , једначина (A.2). Последично, применом једначина (22)–(33), за  $i=1, 2, \dots, n$  добијају се моменти у зглобовима  $u_i$  као

$$u_i = \sum_{j=1}^n h_{ij} \ddot{q}_j + u'_i, \quad i=1 \text{ to } n, \quad (34)$$

$$\sum_{j=1}^n h_{ij} \ddot{q}_j = \mathbf{z}_{i-1}^T (\mathbf{n}'_{ia1} + \mathbf{n}'_{ia2} + \mathbf{n}'_{ia3}) \ddot{\mathbf{q}}, \quad (35)$$

$$u'_i = \mathbf{z}_{i-1}^T \mathbf{n}'_{ic}. \quad (36)$$

$\dot{q}_i(t_k)$  и  $\ddot{q}_i(t_k)$  који се користе при израчунавању  $h_{ij}$ , једначина (35), и  $u'_i$ , једначина (36), се израчунавају на начин дат на почетку Алгорита 1.

За решавање система линеарних једначина (34),  $i=1, 2, \dots, n$ , ради израчунавања убрзања  $\ddot{q}_i(t_k)$ , може се користити Гаусова метода елиминације.

## Примена ДД алгоритма на 6-осном индустријском роботу Лола 15

*Израчунавање вектора  $b_{ik}$  и  $b_{ikj}$  за 6-осни робот серијске конфигурације*

Овде је приказано израчунавање вектора  $\dot{\mathbf{v}}_i^{cm}$ , једначина (5), 6-осног индустријског робота серијске конфигурације Лола 15, слика 3, помоћу вектора  $\mathbf{b}_{ik}$  и  $\mathbf{b}_{ikj}$ , који се користе при израчунавању вектора  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}_{ik}$ , једначине (13)–(15).

$$\dot{\mathbf{v}}_1^{cm} = \mathbf{b}_{11}\ddot{q}_1 + \mathbf{b}_{111}\dot{q}_1^2 \quad (37)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_2^{cm} = \mathbf{b}_{21}\ddot{q}_1 + \mathbf{b}_{22}\ddot{q}_2 + \mathbf{b}_{211}\dot{q}_1^2 + \mathbf{b}_{212}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \mathbf{b}_{222}\dot{q}_2^2 \quad (38)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i' = \mathbf{b}_{i1}\ddot{q}_1 + \mathbf{b}_{i2}\ddot{q}_2 + \mathbf{b}_{i3}\ddot{q}_3 + \mathbf{b}_{i11}\dot{q}_1^2 + \mathbf{b}_{i12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \mathbf{b}_{i13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + \mathbf{b}_{i22}\dot{q}_2^2 + \mathbf{b}_{i23}\dot{q}_2\dot{q}_3 + \mathbf{b}_{i33}\dot{q}_3^2, \quad i=3,4,5,6 \quad (39)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_3^{cm} = \dot{\mathbf{v}}_3' \quad (40)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i'' = \mathbf{b}_{i4}\ddot{q}_4 + \mathbf{b}_{i14}\dot{q}_1\dot{q}_4 + \mathbf{b}_{i24}\dot{q}_2\dot{q}_4 + \mathbf{b}_{i34}\dot{q}_3\dot{q}_4 + \mathbf{b}_{i44}\dot{q}_4^2 \quad (41)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_4^{cm} = \dot{\mathbf{v}}_4' + \dot{\mathbf{v}}_4'' \quad (42)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i''' = \mathbf{b}_{i5}\ddot{q}_5 + \mathbf{b}_{i15}\dot{q}_1\dot{q}_5 + \mathbf{b}_{i25}\dot{q}_2\dot{q}_5 + \mathbf{b}_{i35}\dot{q}_3\dot{q}_5 + \mathbf{b}_{i45}\dot{q}_4\dot{q}_5 + \mathbf{b}_{i55}\dot{q}_5^2, \quad i=5,6 \quad (43)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_5^{cm} = \dot{\mathbf{v}}_5' + \dot{\mathbf{v}}_5'' + \dot{\mathbf{v}}_5''' \quad (44)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_6^{cm} = \dot{\mathbf{v}}_6' + \dot{\mathbf{v}}_6'' + \dot{\mathbf{v}}_6''' + \mathbf{b}_{66}\ddot{q}_6 + [\mathbf{b}_{616}\dot{q}_1 + \mathbf{b}_{626}\dot{q}_2 + \mathbf{b}_{636}\dot{q}_3 + \mathbf{b}_{646}\dot{q}_4 + \mathbf{b}_{656}\dot{q}_5 + \mathbf{b}_{666}\dot{q}_6]\dot{q}_6 \quad (45)$$

Вектори  $\mathbf{b}_{ik}$  и  $\mathbf{b}_{ikj}$  робота Лола 15, слика 4, су дати у Додатку Б.

*Израчунавање вектора  $d_{ik}$  и  $d_{ikj}$  за 6-осни робот серијске конфигурације*

Израчунавање вектора  $\mathbf{N}_i$ , једначина (15), 6-осног индустријског робота помоћу вектора  $\mathbf{d}_{ik}$  и  $\mathbf{d}_{ikj}$ , који се користе при прорачуну вектора  $\mathbf{n}_{ic}$  и  $\mathbf{n}_{ia1}$ , једначине (22)–(24), је приказан у следећим једначинама:

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{d}_{11}\ddot{q}_1 + \mathbf{d}_{111}\dot{q}_1^2 \quad (46)$$

$$\mathbf{N}_i' = \mathbf{d}_{i1}\ddot{q}_1 + \mathbf{d}_{i2}\ddot{q}_2 + \mathbf{d}_{i11}\dot{q}_1^2 + \mathbf{d}_{i12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \mathbf{d}_{i22}\dot{q}_2^2, \quad i=2,3,4,5,6 \quad (47)$$

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_2' \quad (48)$$

$$\mathbf{N}_i'' = \mathbf{d}_{i3}\ddot{q}_3 + \mathbf{d}_{i13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + \mathbf{d}_{i23}\dot{q}_2\dot{q}_3 + \mathbf{d}_{i33}\dot{q}_3^2, \quad \mathbf{d}_{i3} = \mathbf{d}_{i2}, \quad \mathbf{d}_{i13} = \mathbf{d}_{i12}, \quad \mathbf{d}_{i23} = 2\mathbf{d}_{i22}, \quad \text{и} \quad \mathbf{d}_{i33} = \mathbf{d}_{i22}, \quad i = 3,4,5,6 \quad (49)$$

$$\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_3' + \mathbf{N}_3'' \quad (50)$$

$$\mathbf{N}_i''' = \mathbf{d}_{i4}\ddot{q}_4 + \mathbf{d}_{i14}\dot{q}_1\dot{q}_4 + \mathbf{d}_{i24}\dot{q}_2\dot{q}_4 + \mathbf{d}_{i34}\dot{q}_3\dot{q}_4 + \mathbf{d}_{i44}\dot{q}_4^2, \quad i=4,5,6 \quad (51)$$

$$\mathbf{N}_4 = \mathbf{N}'_4 + \mathbf{N}''_4 + \mathbf{N}'''_4 \quad (52)$$

$$\mathbf{N}'''_i = \mathbf{d}_{i5} \ddot{q}_5 + \mathbf{d}_{i15} \dot{q}_1 \dot{q}_5 + \mathbf{d}_{i25} \dot{q}_2 \dot{q}_5 + \mathbf{d}_{i35} \dot{q}_3 \dot{q}_5 + \mathbf{d}_{i45} \dot{q}_4 \dot{q}_5 + \mathbf{d}_{i55} \dot{q}_5 \dot{q}_5, \quad i=5,6 \quad (53)$$

$$\mathbf{N}_5 = \mathbf{N}'_5 + \mathbf{N}''_5 + \mathbf{N}'''_5 + \mathbf{N}''''_5 \quad (54)$$

$$\mathbf{N}_6 = \mathbf{N}'_6 + \mathbf{N}''_6 + \mathbf{N}'''_6 + \mathbf{N}''''_6 + \mathbf{d}_{66} \ddot{q}_6 + \mathbf{d}_{616} \dot{q}_1 \dot{q}_6 + \mathbf{d}_{626} \dot{q}_2 \dot{q}_6 + \mathbf{d}_{636} \dot{q}_3 \dot{q}_6 + \mathbf{d}_{646} \dot{q}_4 \dot{q}_6 + \mathbf{d}_{656} \dot{q}_5 \dot{q}_6 + \mathbf{d}_{666} \dot{q}_6 \dot{q}_6 \quad (55)$$

Вектори  $\mathbf{d}_{ik}$  и  $\mathbf{d}_{ikj}$  робота Лола 15 су дати у Додатку Б.

*Вектори  $\mathbf{n}'_{ic}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia2}$ , и  $\mathbf{n}'_{ia3}$  робота Лола15*

Прорачун вектора  $\mathbf{n}'_{ic}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia2}$ , и  $\mathbf{n}'_{ia3}$ , једначине (22)–(31), за робот Лола15 су дате у једначинама испод.

*Вектори  $\mathbf{n}'_{ic}$*

$$\mathbf{n}'_{6c} = \mathbf{d}_6 + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_6 + \mathbf{p}_7 \times \mathbf{f}_7, \quad (56)$$

$$\mathbf{n}'_{5c} = \mathbf{n}'_{6c} + \mathbf{d}_5 + \mathbf{l}_5 \times \mathbf{e}_5, \quad (57)$$

$$\mathbf{n}'_{4c} = \mathbf{n}'_{5c} + \mathbf{d}_4 + \mathbf{l}_4 \times \mathbf{e}_4, \quad (58)$$

$$\mathbf{n}'_{3c} = \mathbf{n}'_{4c} + \mathbf{d}_3 + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_4, \quad \text{где је } \mathbf{E}_4 = \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6 + \mathbf{f}_7, \quad (59)$$

$$\mathbf{n}'_{2c} = \mathbf{n}'_{3c} + \mathbf{d}_2 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_3, \quad \text{где је } \mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_4 + \mathbf{e}_3, \quad (60)$$

$$n'_{1cz} = n'_{2cz} + d_{1z} + l_{1x} e_{1y} - l_{1y} e_{1x} + p_{1x}^* E_{y2} - p_{1y}^* E_{x2}, \quad \text{где је } E_{x2} = E_{x3} + e_{x2}, \quad E_{y2} = E_{y3} + e_{y2}. \quad (61)$$

*Вектори  $\mathbf{n}'_{ia1}$*

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{6a1} &= [\mathbf{n}'_{61a1} \quad \mathbf{n}'_{62a1} \quad \mathbf{n}'_{63a1} \quad \mathbf{n}'_{64a1} \quad \mathbf{n}'_{65a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1}] \\ &= [\mathbf{d}_{61} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{61} \quad \mathbf{d}_{62} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{62} \quad \mathbf{d}_{63} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{63} \quad \mathbf{d}_{64} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{64} \quad \mathbf{d}_{65} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{65} \quad \mathbf{d}_{66} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{66}], \end{aligned} \quad (62)$$

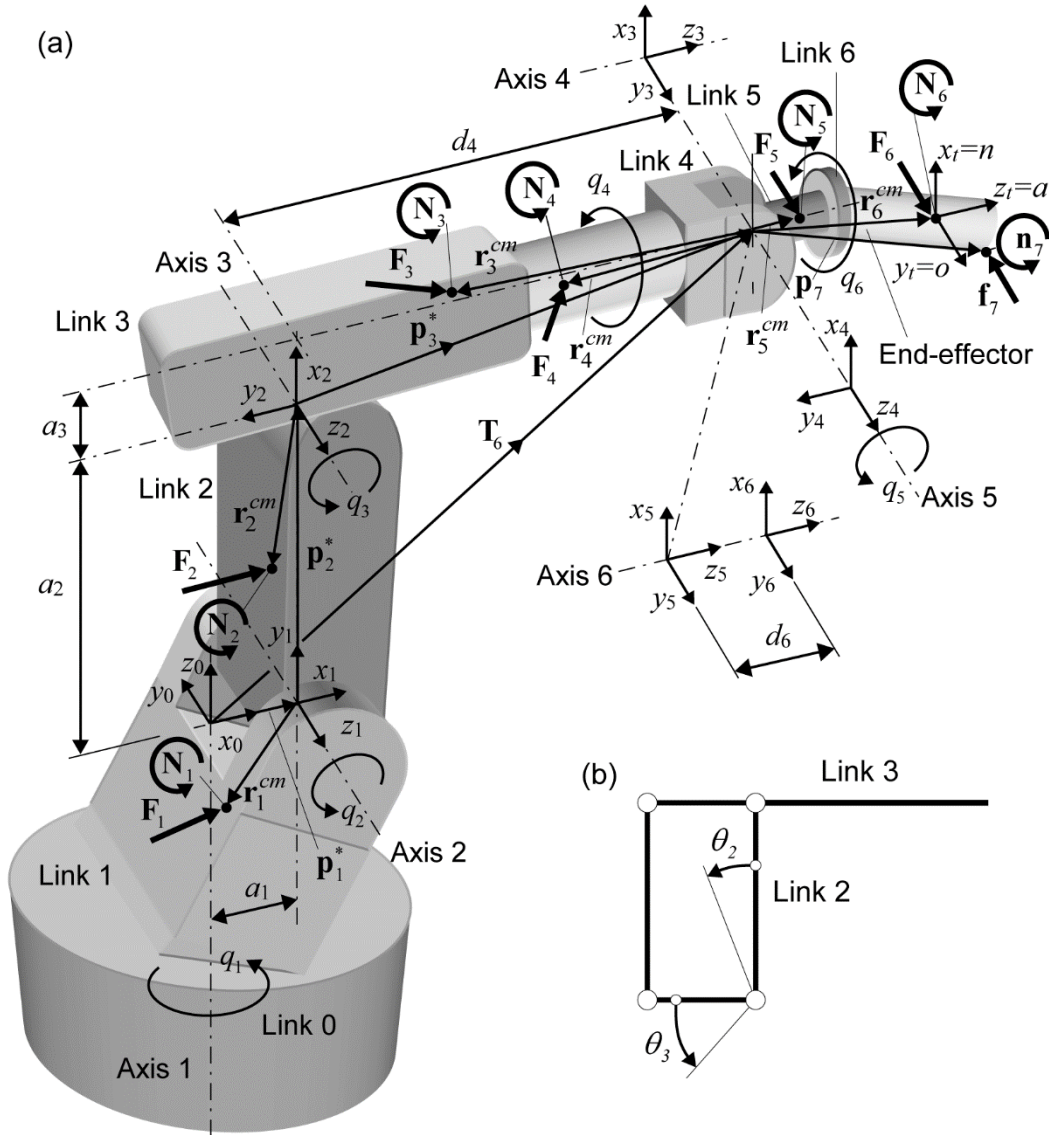
$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{5a1} &= [\mathbf{n}'_{51a1} \quad \mathbf{n}'_{52a1} \quad \mathbf{n}'_{53a1} \quad \mathbf{n}'_{54a1} \quad \mathbf{n}'_{55a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1}] \\ &= \left[ \sum_{k=5}^6 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) \quad \sum_{k=5}^6 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \quad \sum_{k=5}^6 (\mathbf{d}_{k3} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k3}) \quad \sum_{k=5}^6 (\mathbf{d}_{k4} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k4}) \quad \sum_{k=5}^6 (\mathbf{d}_{k5} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k5}) \quad \mathbf{n}'_{66a1} \right], \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{4a1} &= [\mathbf{n}'_{41a1} \quad \mathbf{n}'_{42a1} \quad \mathbf{n}'_{43a1} \quad \mathbf{n}'_{44a1} \quad \mathbf{n}'_{55a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1}] \\ &= \left[ \sum_{k=4}^6 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) \quad \sum_{k=4}^6 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \quad \sum_{k=4}^6 (\mathbf{d}_{k3} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k3}) \quad \sum_{k=4}^6 (\mathbf{d}_{k4} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k4}) \quad \mathbf{n}'_{55a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1} \right], \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{3a1} &= [\mathbf{n}'_{31a1} \quad \mathbf{n}'_{32a1} \quad \mathbf{n}'_{33a1} \quad \mathbf{n}'_{44a1} \quad \mathbf{n}'_{55a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1}] \\ &= \left[ \sum_{k=3}^6 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) \quad \sum_{k=3}^6 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \quad \sum_{k=3}^6 (\mathbf{d}_{k3} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k3}) \quad \mathbf{n}'_{44a1} \quad \mathbf{n}'_{55a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1} \right], \end{aligned} \quad (65)$$

$$\mathbf{n}'_{2a1} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}'_{21a1} & \mathbf{n}'_{22a1} & \mathbf{n}'_{33a1} & \mathbf{n}'_{44a1} & \mathbf{n}'_{55a1} & \mathbf{n}'_{66a1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^6 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) & \sum_{k=2}^6 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) & \mathbf{n}'_{33a1} & \mathbf{n}'_{44a1} & \mathbf{n}'_{55a1} & \mathbf{n}'_{66a1} \end{bmatrix}, \quad (66)$$

$$\mathbf{n}'_{1a1z} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^6 (d_{k1z} + l_{kx} e_{k1y} - l_{ky} e_{k1x}) & \mathbf{n}'_{22a1z} & \mathbf{n}'_{33a1z} & \mathbf{n}'_{44a1z} & \mathbf{n}'_{55a1z} & \mathbf{n}'_{66a1z} \end{bmatrix}. \quad (67)$$



Слика 3. (а) КС, центри маса, силе и моменти који делују на чланове робота Лола15 са шест ротационих степени слобода код кога се три последње осе секу у тачки. (б) Ефекти геометријског купловања при кретању чланова 2 и 3.

Вектори  $\mathbf{n}'_{ia2}$

$$\mathbf{n}'_{4a2} = \mathbf{n}'_{5a2} = \mathbf{n}'_{6a2} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{n}'_{3a2} = [\mathbf{n}'_{31a2} \quad \mathbf{n}'_{32a2} \quad \mathbf{n}'_{33a2} \quad \mathbf{n}'_{34a2} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] = [\mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_{41} \quad \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_{42} \quad \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_{43} \quad \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_{44} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}], \quad (68)$$

где је  $E_{x41}=e_{x41}+e_{x51}+e_{x61}$ ,  $E_{y41}=e_{y41}+e_{y51}+e_{y61}$ ,  $\mathbf{E}_{42}=\mathbf{e}_{42}+\mathbf{e}_{52}+\mathbf{e}_{62}$ ,  $\mathbf{E}_{43}=\mathbf{e}_{43}+\mathbf{e}_{53}+\mathbf{e}_{63}$ ,  $\mathbf{E}_{44}=\mathbf{e}_{44}+\mathbf{e}_{54}+\mathbf{e}_{64}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{2a2} &= [\mathbf{n}'_{21a2} \quad \mathbf{n}'_{22a2} \quad \mathbf{n}'_{23a2} \quad \mathbf{n}'_{24a2} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \\ &= \left[ \sum_{k=2}^3 (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)1}) \quad \sum_{k=2}^3 (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)2}) \quad \sum_{k=2}^3 (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)3}) \quad \mathbf{n}'_{34a2} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right], \end{aligned} \quad (69)$$

где је  $E_{x31}=E_{x41}+e_{x31}$ ,  $E_{y31}=E_{y41}+e_{y31}$ ,  $\mathbf{E}_{32}=\mathbf{E}_{42}+\mathbf{e}_{32}$ ,  $\mathbf{E}_{33}=\mathbf{E}_{43}+\mathbf{e}_{33}$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{1a2} &= [\mathbf{n}'_{11a2} \quad \mathbf{n}'_{12a2} \quad \mathbf{n}'_{13a2} \quad \mathbf{n}'_{14a2} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \\ &= \left[ \sum_{k=1}^3 (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)1}) \quad \sum_{k=1}^3 (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)2}) \quad \mathbf{n}'_{23a2} \quad \mathbf{n}'_{24a2} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n'_{1a2z} &= [n'_{z11a2} \quad n'_{z12a2} \quad n'_{z23a2z} \quad n'_{z34a2z} \quad 0 \quad 0] \\ &= [n'_{z21a2} + p_{1x}^* E_{y21} - p_{1y}^* E_{x21} \quad n'_{z22a2} + p_{1x}^* E_{y22} - p_{1y}^* E_{x22} \quad n'_{z23a2z} \quad n'_{z34a2z} \quad 0 \quad 0], \end{aligned} \quad (70)$$

где је  $E_{x21}=E_{x31}+e_{x21}$ ,  $E_{y21}=E_{y31}+e_{y21}$ ,  $E_{x22}=E_{x32}+e_{x22}$ ,  $E_{y22}=E_{y32}+e_{y22}$ .

Вектори  $\mathbf{n}'_{ia3}$

$$\mathbf{n}_{3a3} = \mathbf{p}_3^* \times \sum_{k=5}^6 \mathbf{E}_{kk} \ddot{q}_k = \sum_{k=5}^6 \mathbf{n}_{3ka3} \ddot{q}_k, \quad \text{где је } \mathbf{E}_{55}=\mathbf{e}_{55}+\mathbf{e}_{65}, \mathbf{E}_{66}=\mathbf{e}_{66}, \quad (71)$$

$$\mathbf{n}_{2a3} = \mathbf{p}_2^* \times \sum_{k=4}^6 \mathbf{E}_{kk} \ddot{q}_k = \sum_{k=4}^6 \mathbf{n}_{2ka3} \ddot{q}_k, \quad (72)$$

$$\mathbf{n}_{1a3} = \mathbf{p}_1^* \times \sum_{k=3}^6 \mathbf{E}_{kk} \ddot{q}_k = \sum_{k=3}^6 \mathbf{n}_{1ka3} \ddot{q}_k, \quad (73)$$

$$\mathbf{n}'_{3a3} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{n}_{35a3} \quad \mathbf{n}_{36a3}] = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_{55} \quad \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{e}_{66}], \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{2a3} &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{n}_{24a3} \quad \mathbf{n}_{25a3} + \mathbf{n}_{35a3} \quad \mathbf{n}_{26a3} + \mathbf{n}_{36a3}] \\ &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{44} \quad (\mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^*) \times \mathbf{E}_{55} \quad (\mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^*) \times \mathbf{e}_{66}], \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{1a3} &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{n}_{13a3} \quad \mathbf{n}_{14a3} + \mathbf{n}_{24a3} \quad \mathbf{n}_{15a3} + \mathbf{n}_{25a3} + \mathbf{n}_{35a3} \quad \mathbf{n}_{16a3} + \mathbf{n}_{26a3} + \mathbf{n}_{36a3}] \\ &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{E}_{33} \quad (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^*) \times \mathbf{E}_{44} \quad (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^*) \times \mathbf{E}_{55} \quad (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^*) \times \mathbf{e}_{66}]. \end{aligned} \quad (76)$$

### ДЦ у односу на моторе робота

Слично као и у једначини (1), једначине кретања робота се могу написати у функцији сила/момената мотора робота на следећи начин:

$$\mathbf{H}_a(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{u}'_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_{ea}) = \mathbf{u}_a, \quad (77)$$

$$\mathbf{u}'_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_{ea}) = \mathbf{C}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_a(\mathbf{q}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{k}_{ea} + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}). \quad (78)$$

Матрица  $\mathbf{H}_a(\mathbf{q})$ , и вектори  $\mathbf{u}'_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_{ea})$  и  $\mathbf{u}_a$  се односе на роторе актуатора; чланови  $u'_{ai}$  и  $h_{aij}$  за робот Лола15 су дати у Додатку Г.  $\mathbf{F}_v$  означава  $n \times n$  дијагоналну матрицу чији су чланови вискозни коефицијенти трења  $f_{vi}$ . Усвојено је да се моменти статичког трења посматрају као моменти Кулоновог трења;  $\mathbf{F}_s$  је  $n \times n$  дијагонална матрица чији су чланови Кулонове константе трења. Иако константа Кулоновог трења има једну вредност за  $\dot{q}_i = 0$ , статички коефицијент, и нижу вредност за  $\dot{q}_i \neq 0$ , динамички коефицијент, иста вредност  $\mu_{si}$  ове константе је усвојена за оба случаја [25]. Овде,  $\text{sign}(\dot{\mathbf{q}})$  означава  $n \times 1$  вектор чије су компоненте  $\text{sign}$  функције брзина зглоба.

Тачка 4 Алгоритма 1 израчунава моменте мотора  $\mathbf{u}_a$  на основу могућности мотора. Уколико нека апсолутна вредност  $u_{ai}$  превазилази максималну вредност коју мотор може остварити, она се ограничава на максималну могућу вредност. Након тога се оствариве (реалне) вредности  $u_{ai}$  користе у следећем систему  $n$  линеарних једначина како би се прорачунале оствариве (реалне) вредности убрзања  $\ddot{q}_i$ :

$$\sum_{j=1}^n h_{aij} \ddot{q}_j = u_{ai} - u'_{ai}, \quad i=1 \text{ to } n. \quad (79)$$

Коначно, угаоне брзине и позиције зглобова се прорачунавају као што је описано на крају Алгоритма 1.

## Верификација програма ERFD

Представљени ДД алгоритам је тестиран при симулацији кретања робота Лола 15 у оквиру симулационог система који је развијен за овај индустријски робот. Овде је приказан програм кретања који се састоји из 13 кретања робота Лола 15 (путања енд-ефектора је приказана на слици 4). У току првих 10 кретања, енд-ефектор се креће по путањи без заустављања. Прво кретање је типа РТР (Point To Point), следећих 9 су типа СР (Continuous Path), а последња три су РТР.

Максималне брзине и убрзања чланова робота Лола15 за осе  $i = 1$  до 6 су 3,05, 3,46, 3,08, 2,66, 1,62, 6,67 rad/s, и 3,75, 2,1, 3,75, 3,75, 1,5, 6,0 rad/s<sup>2</sup>, следствено. У оквиру симулационог програма, спољашње силе су  $f_{ex} = 100$ ,  $f_{ey} = 100$  и  $f_{ez} = -150$  N, а  $\Delta t$  је 0,01 s. Одређивање инерцијалних и геометријских параметара чланова робота је извршено у софтверу САТИА. Вискозни и статички коефицијенти трења зглобова робота су дата у Додатку Г. Ефекти геометријског купловања при кретању чланова, преносни односи преносника и чланови  $u'_{ai}$  и  $h_{aij}$ , једначине (77)–(79), су такође дати у Додатку Г. Подаци о моторима за робот Лола 15 су приказани у Додатку Д.

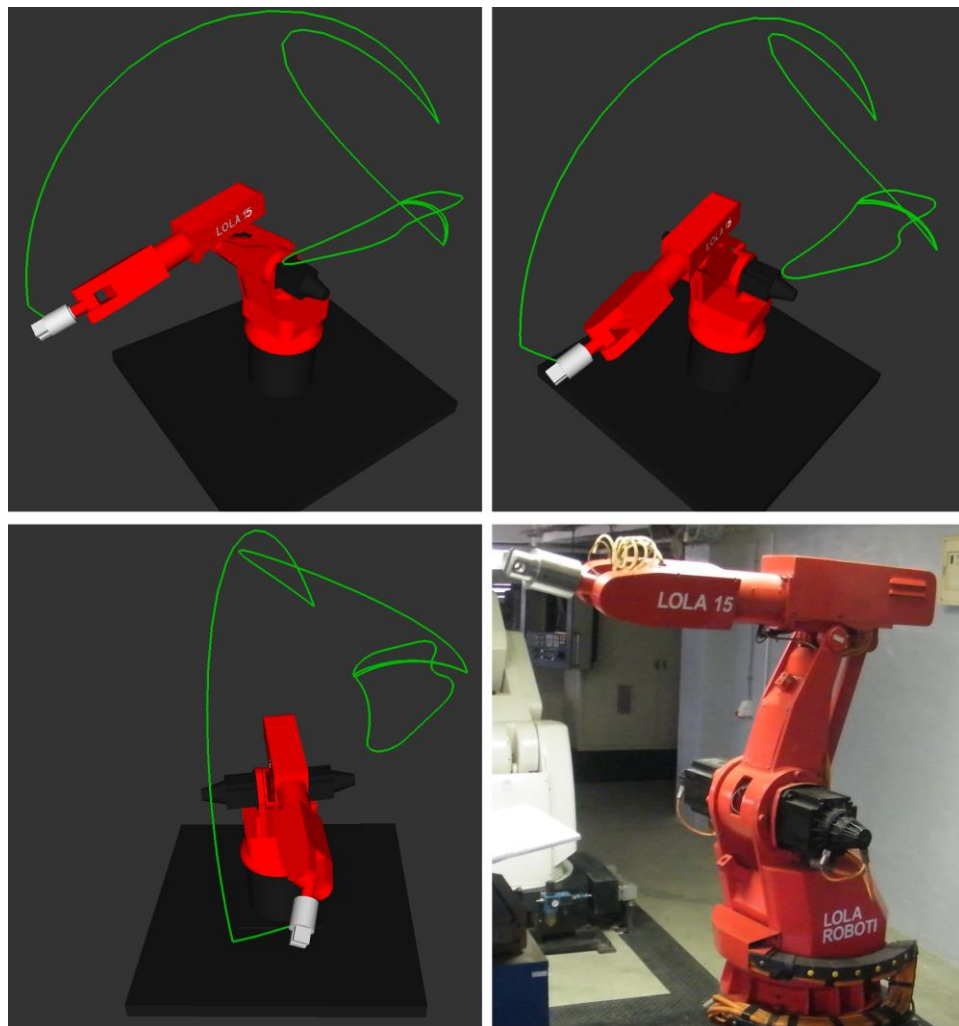
Дијаграми покретачких момената у зглобовима  $u_i$  добијени применом класичне RNEA процедуре и применом mRNEA процедуре су дати на слици 5. Резултати симулације који су дати на слици 5 показују да су моменти израчунати применом ове две процедуре идентични у сваком периоду интерполације.

Алгоритам 1 је такође тестиран на приказаном симулационом примеру. Сlike 6 и 7 приказују моменте мотора и угаона убрзања, брзине и позиције чланова робота, следствено, добијене са и без извршавања Алгоритма 1. Из ових дијаграма се може видети да у одређеним периодима интерполације мотори не могу да постигну захтеване моменте који би остварили програмиране брзине и убрзања, што доводи до кашњења у

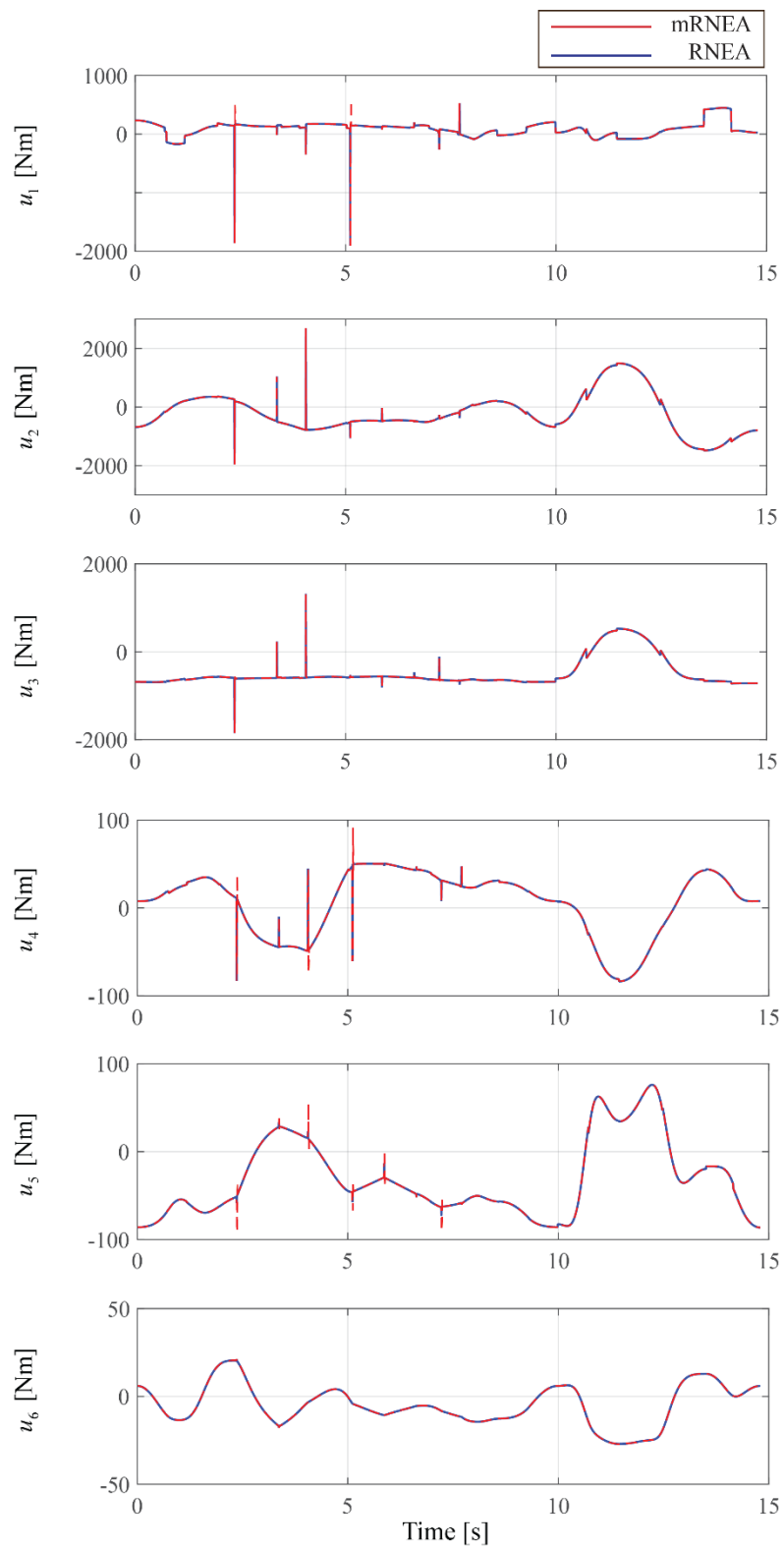
програмираним кретањима чланова робота. Из представљених дијаграма, може се видети да Алгоритам 1 као излазе даје само оствариве угаоне брзине у зглобовима. Стога, доприноси представљеног алгоритма су следећи:

1. Може се користити за програмирање реалних, тј. остваривих трајекторија зглобова;
2. Може се користити у оквиру пројектовања робота, с обзиром да омогућава прорачун реалних вредности сила и момената који делују на чланове и зглобове робота (узимајући у обзир могућности мотора у зглобовима).
3. Може се користити за управљачке сврхе, јер се његовом имплементацијом у планер путање добијају оствариве вредности брзина/позиција чланова робота које се шаљу сервосистемима, те се остварују боље перформансе управљачког система.

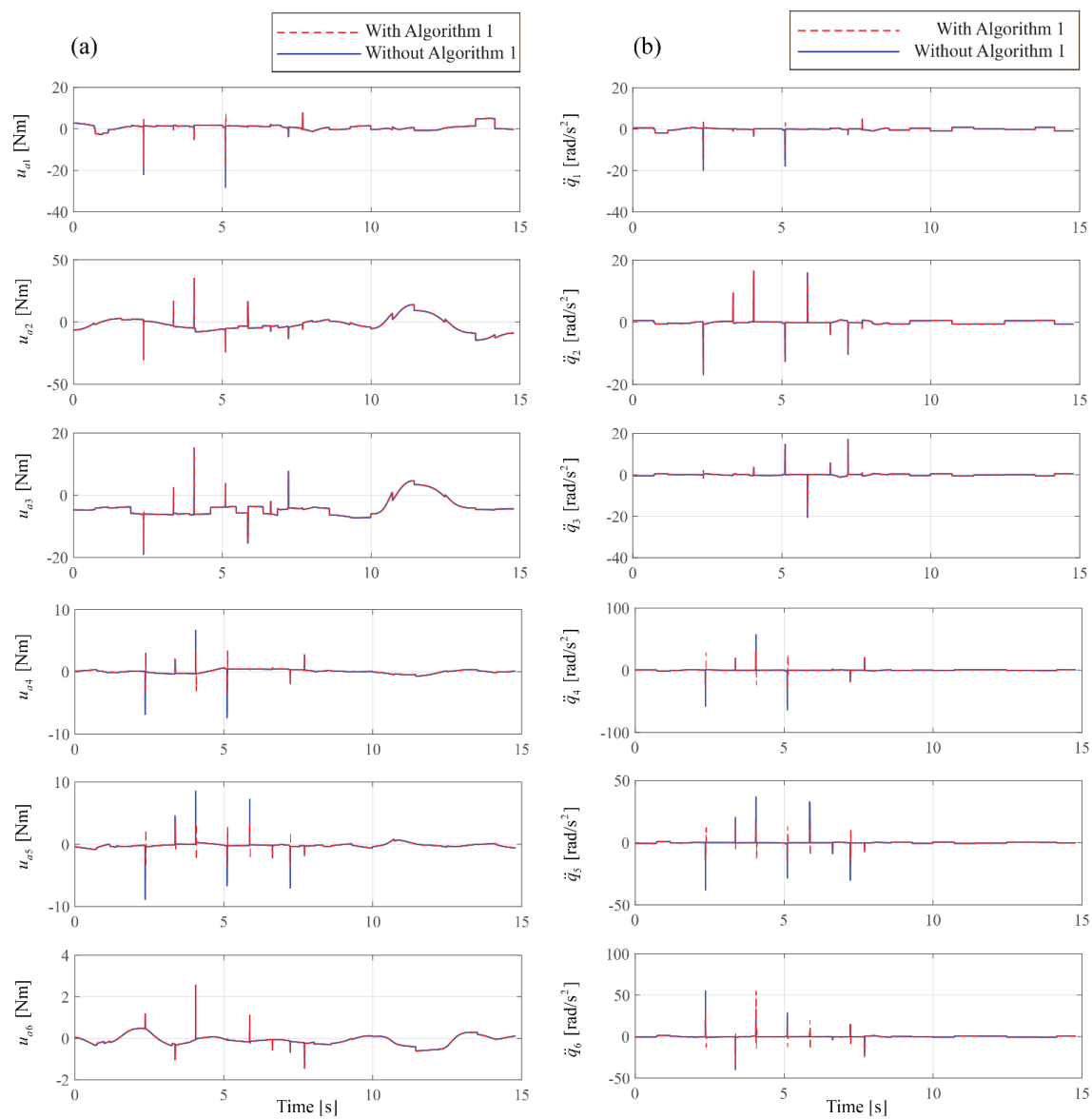
Дијаграми представљени на сликама 6 и 7 показују да у интерполационим периодима када осе робота не могу да достигну програмирана убрзања, Алгоритам 1 врши замену недостижних вредности брзина и убрзања зглобова вредностима које се могу остварити примењеним моторима. Услед тога, путања енд-ефектора ће се разликовати од програмиране путање.



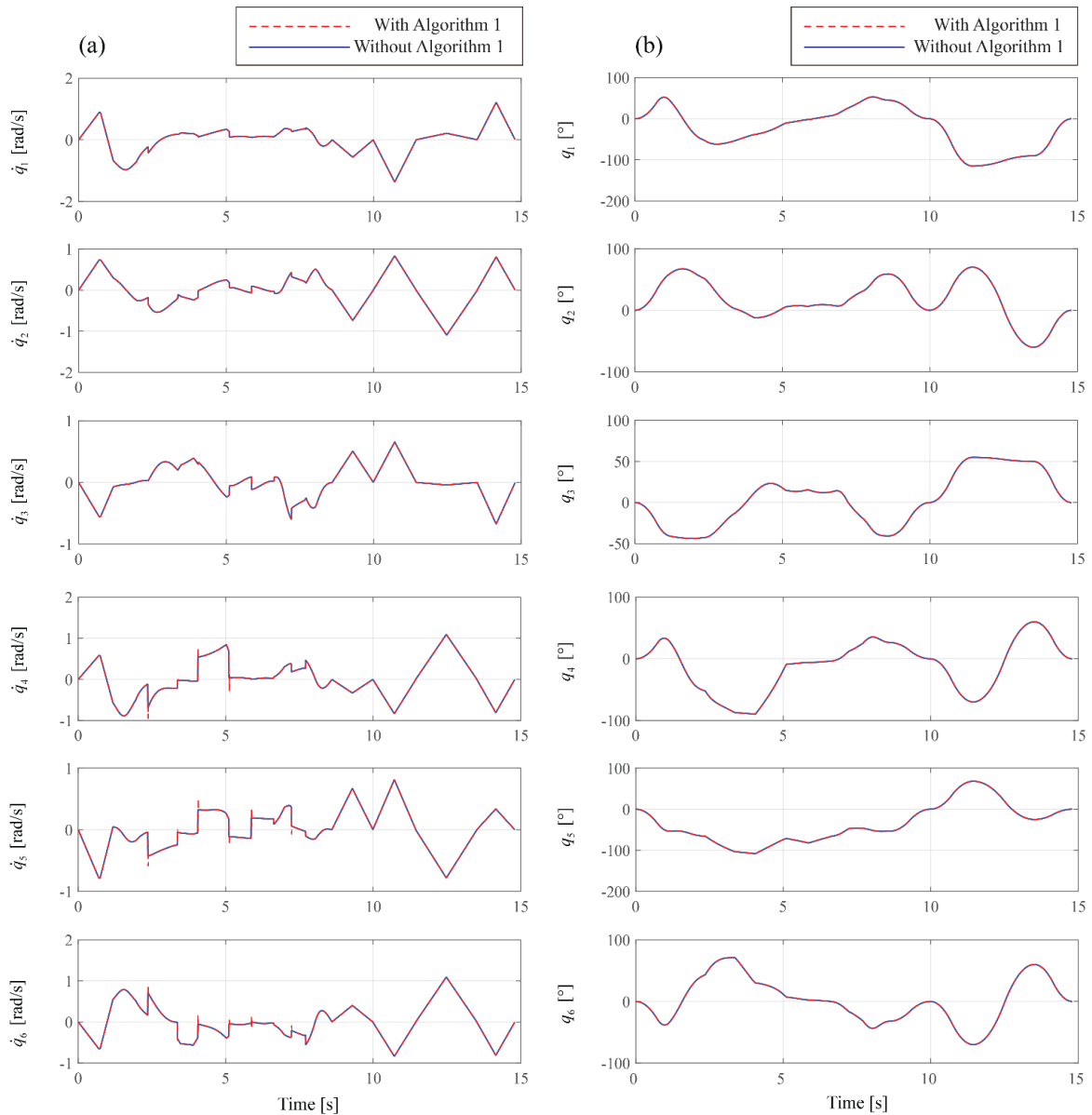
Слика 4. Пример путање енд-ефектора током кретања и симулације кретања робота Лола15.



Слика 5. Моменти  $u_i$  добијени применом RNEA и mRNEA алгоритма.



**Слика 6.** (a) Моменти мотора  $u_{i_a}$  добијени применом Алгоритма 1. (b) Угаона убрзања чланова робота  $\ddot{q}_i$  добијена са и без примене Алгоритма 1.



**Слика 7.** (а) Угаоне брзине чланова робота  $\dot{q}_i$  добијене са и без примене Алгоритма 1. (б) Угаоне позиције чланова робота  $q_i$  добијене са и без примене Алгоритма 1

## Имплементација софтвера ERFD

Програм за решавање ДД робота ERFD написан је у програмском језику C++. Основна намена овог програма је везана за имплементацију у оквиру система за програмирање, управљање, симулацију и удаљено праћење рада робота, али се може користити и као самостална софтверска апликација.

У оквиру овог техничког решења приказана је имплементација програма ERFD у оквиру управљачког система L-RC, и то за три корисничке примене: 1) Као део офлаин система за програмирање и верификацију путања робота; 2) У оквиру 3Д виртуелног окружења за симулацију и верификацију путање; и 3) онлаин модул који омогућава праћење рада робота у реалном времену. Дат је опис виртуелних графичких окружења у којима је имплементиран ERFD.

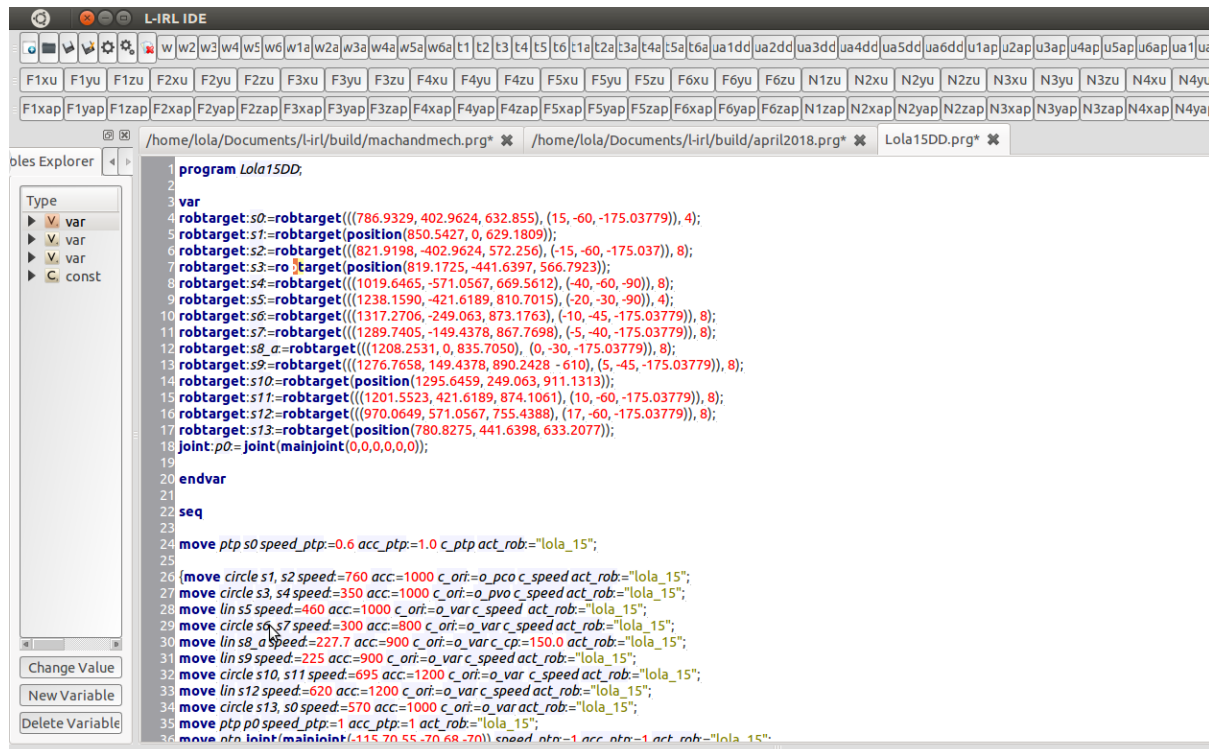
## Лола Робот Контролери L-RC

Софтверска база управљачког система је real-time верзија Linux Ubuntu оперативног система. Open-source real-time оперативни систем обезбеђује високу перформансу која је неопходна за потребе управљања роботима, као и флексибилност која омогућава једноставну кастомизацију софтвера. Језгро управљачког софтверског система је OROCOS платформа. Дистрибуирани софтверски управљачки систем користи CORBA protocol [26].

## Имплементација у планер трајекторије робота

Алгоритам ДД је имплементиран у планер трајекторије робота Лола 15, као и уређаја за тренажу пилота, и то 3-осне центрифуге за тренажу пилота и 4-осног уређаја за просторну дезоријентацију пилота.

Планер трајекторије је део софтверског система L-IRL за управљање кретањем, програмирање и праћење рада робота. Овај софтверски систем је модуларан и реконфигурабилан. Дизајниран је са императивом флексибилности у смислу увођења управљања у нови роботски систем. Улаз у планер путање су подаци дати у апликативном програму написаном у L-IRL програмском језику, слика 8. Путање робота задате у 3Д координатном систему (кретање енд-ефектора) или у простору зглобова робота се интерполирају по времену, при чему је период интерполације  $\Delta t=0,01$  s. Уколико су путање дефинисане преко кретања енд-ефектора, алгоритам инверзне кинематике преводи вредности из Декартовог КС (позицију и оријентацију врха енд-ефектора) у угаоне позиције зглобова робота.

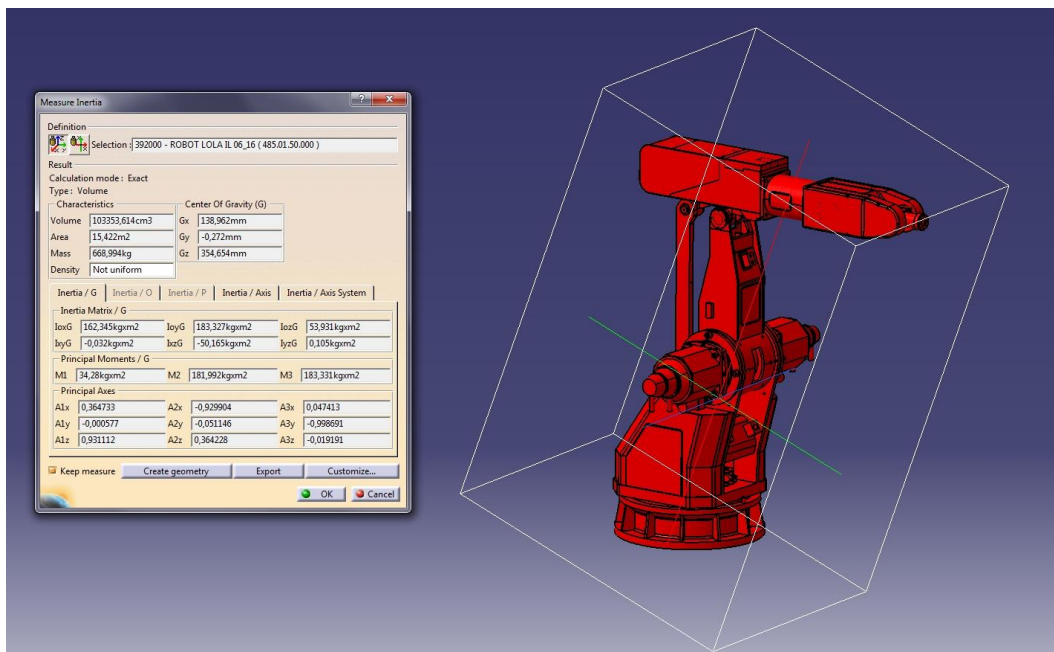


```
1 program Lola15DD;
2
3 var
4 robtarg:s0=robtarg(((786.9329, 402.9624, 632.855), (15, -60, -175.03779)), 4);
5 robtarg:s1=robtarg(position(850.5427, 0, 629.1809));
6 robtarg:s2=robtarg(((821.9198, -402.9624, 572.256), (-15, -60, -175.037)), 8);
7 robtarg:s3=robtarg(position(819.1725, -441.6397, 566.7923));
8 robtarg:s4=robtarg(((1019.6465, -571.0567, 669.5612), (-40, -60, -90)), 8);
9 robtarg:s5=robtarg(((1238.1590, -421.6189, 810.7015), (-20, -30, -90)), 4);
10 robtarg:s6=robtarg(((1317.2706, -249.063, 873.1763), (-10, -45, -175.03779)), 8);
11 robtarg:s7=robtarg(((1289.7405, -149.4378, 867.7698), (-5, -40, -175.03779)), 8);
12 robtarg:s8_a=robtarg(((1208.2531, 0, 835.7050), (0, -30, -175.03779)), 8);
13 robtarg:s9=robtarg(((1276.7658, 149.4378, 890.2428 - 610), (5, -45, -175.03779)), 8);
14 robtarg:s10=robtarg(position(1295.6459, 249.063, 911.1313));
15 robtarg:s11=robtarg(((1201.5523, 421.6189, 874.1061), (10, -60, -175.03779)), 8);
16 robtarg:s12=robtarg(((970.0649, 571.0567, 755.4388), (17, -60, -175.03779)), 8);
17 robtarg:s13=robtarg(position(780.8275, 441.6398, 633.2077));
18 joint:p0=joint(mainjoint(0,0,0,0,0));
19
20 endvar
21
22 seq
23
24 move ptp s0 speed_ptp=0.6 acc_ptp=1.0 c_ptp act_rob="lola_15";
25
26 {move circle s1, s2 speed=760 acc=1000 c_ori=o_pco c_speed act_rob="lola_15";
27 move circle s3, s4 speed=350 acc=1000 c_ori=o_pvo c_speed act_rob="lola_15";
28 move lin s5 speed=460 acc=1000 c_ori=o_var c_speed act_rob="lola_15";
29 move circle s6, s7 speed=300 acc=800 c_ori=o_var c_speed act_rob="lola_15";
30 move lin s8_a speed=227.7 acc=900 c_ori=o_var c_cp=150.0 act_rob="lola_15";
31 move lin s9 speed=225 acc=900 c_ori=o_var c_speed act_rob="lola_15";
32 move circle s10, s11 speed=695 acc=1200 c_ori=o_var c_speed act_rob="lola_15";
33 move lin s12 speed=620 acc=1200 c_ori=o_var c_speed act_rob="lola_15";
34 move circle s13, s0 speed=570 acc=1000 c_ori=o_var act_rob="lola_15";
35 move ptp p0 speed_ptp=1 acc_ptp=1 act_rob="lola_15";
36 move ptp joint(mainjoint(-115.70, 55.70, 68.70)) speed_ptp=1 acc_ptp=1 act_rob="lola_15";
```

Слика 8. Апликативно програмирање робота Лола15 у L-IRL-IDE (L-IRL Integrated development environment)

Интерполирана путања зглобова робота као временски низ узастопних позиција зглобова, заједно са нивовима који представљају угаоне брзине и убрзања зглобова, представља улаз у Алгоритам 1. Када се изврши провера остваривости задатих вредности брзина за сваки период интерполације, жељене позиције, брзине и убрзања зглобова робота се шаљу у алгоритам ИД, једначина (34). Уколико су вредности жељених момената/сила који се добијају из процедуре ИД већи од максималних вредности које мотори могу остварити, моменти се ограничавају на максималне оствариве, и решава се систем једначина (77). Ово је олакшано тиме што су матрица инерције  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  и офсет вектор  $\mathbf{u}'$  већ израчунати током решавања ИД помоћу mRNEA.

При развоју динамичког модела робота коришћени су параметри механичке структуре добијене из 3Д модела робота који је дизајниран у САЕ софтверу Catia. Catia омогућава различите методе структуралне анализе уз употребу методе коначних елемената. У Catia софтверу су прорачунате масе, матрице инерције чланова и центри маса чланова у односу на КС који су везани за чланове, слика 9.

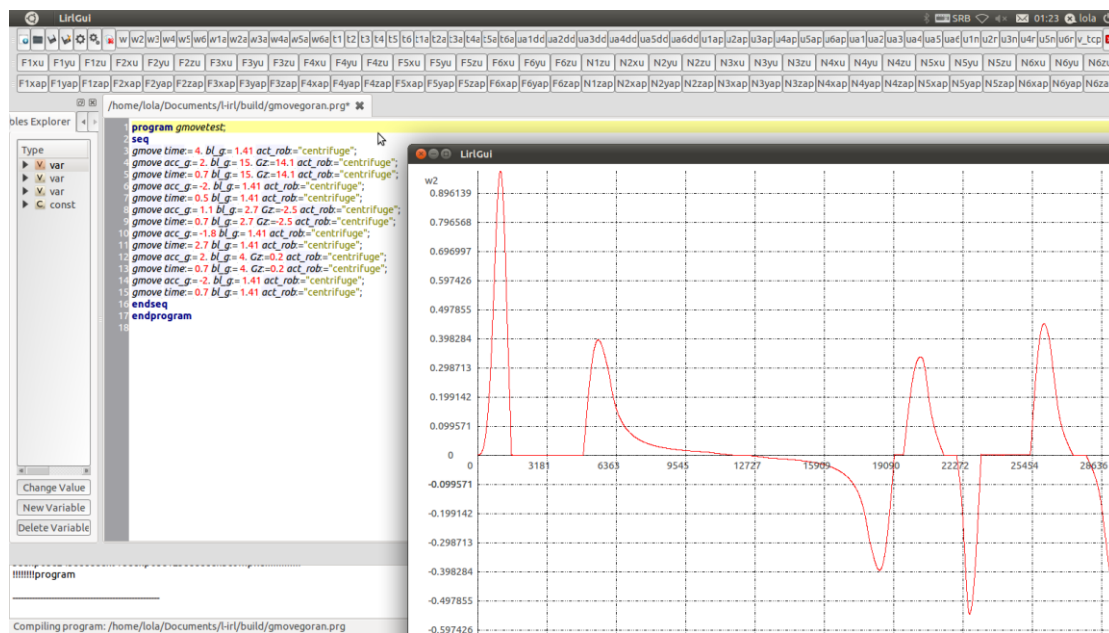


Слика 9. Прорачун чланова матрице инерције у Catia софтверу

## Имплементација ERFD у оквиру офлајн система за програмирање и верификацију путања робота

Имплементацијом ERFD у планер путање робота омогућена је исправна симулација и верификација путања робота за потребе офлајн програмирања робота у оквиру програмског језика L-IRL који је саставни део робот контролера L-RC. Након писања апликативног програма у L-IRL језику, врши се провера остваривости програмираних брзина и убрзања на основу максималних момената и сила које мотори могу остварити. Планер путање језика L-IRL ће на основу ERFD кориснику омогућити верификацију путање робота и као излаз за сваки период интерполације дати нивове остваривих положаја зглобова и мотора робота.

Графички кориснички интерфејс у оквиру L-IRL језика омогућава и додатну верификацију програмираног кретања робота кроз графички приказ трајекторија, жељених момената, сила у зглобовима итд који се добијају кликом на поље у оквиру L-IRL GUI, слика 10.



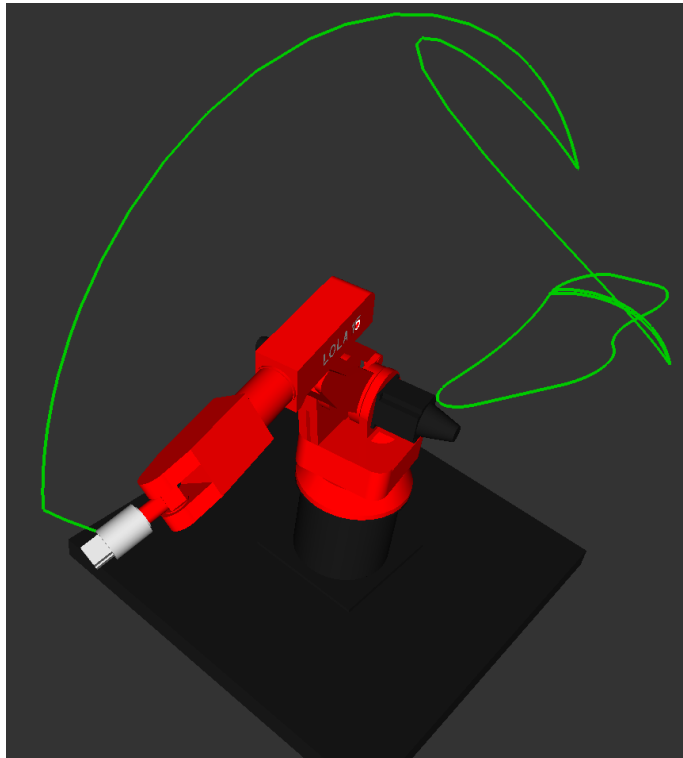
Слика 10. Верификација путање за центрифугу за тренажу пилота у оквиру L-IRL GUI (L-IRL Graphical User Interface)

### 3Д виртуелно окружење за симулацију и верификацију путање робота

3Д виртуелно окружење за симулацију и верификацију путање роботских програма има онлаин модул у оквиру управљачког система који се користи за симулацију и праћење кретања робота у реалном времену и офлаин модул који служи за симулацију и верификацију путања робота, а који може да се користи као самостална софтверска апликација. 3Д виртуелно графичко окружење је развијено употребом *open-source* алата.

3Д модел робота и модел окружења су развијени употребом Open Graphics Library (OpenGL) софтвера. 3Д виртуални модел индустријског робота Лола 15 је израђен комбиновањем геометријских примитива, према реалним димензијама робота. За сваки члан робота су дефинисане кинематичке везе и ограничења у C++ програмском језику. Додељени су КС у складу са Денавит-Хартенберг (ДХ) конвенцијом која је коришћена за решавање директног кинематичког задатка. QGLViewer је *open-source* софтвер који омогућава интеракцију са виртуалним графичким окружењем, кроз омогућавање извршавања команди као што су ротација, translација, зумирање 3Д модела и слично.

Путање које се симулирају у 3Д виртуалном окружењу су добијене као излаз из планера путање робота за задати програм написан на L-IRL програмском језику. Имплементацијом софтвера ERFD омогућена је симулација кретања робота у реалном времену високе тачности. Софтвер ERFD на овај начин даје велики допринос веродостојној симулацији кретања робота.



**Слика 11.** Симулација рада робота у реалном времену у L-IRL 3Д виртуелном графичком окружењу.

## Додаци

### Додатак А. Кинематички модел робота Лола 15

За дефинисање кинематичког модела робота Лола15, слика 3 а, коришћена је ДХ конвенција. ДХ параметри су дати у Табели А.1.

**Табела А.1**

ДХ параметри чланова робота Лола15.

Члан	Променљива [°]	$a$ [mm]	$d$ [mm]	$\alpha$ [°]
1	$q_1$	$a_1=200$	0	$\alpha_1=90$
2	$q_2+90$	$a_2=600$	0	0
3	$q_3$	$a_3=115$	0	$\alpha_3=90$
4	$q_4$	0	$d_4=825$	$\alpha_4=-90$
5	$q_5$	0	0	$\alpha_5=90$
6	$q_6$	0	0	0

МХТ којима су описани кинематички односи између узастопних чланова робота Лола15 су:

$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & c_1 a_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & s_1 a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & -s_2 a_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & c_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & c_3 a_3 + s_3 d_4 \\ s_3 & 0 & -c_3 & s_3 a_3 - c_3 d_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
{}^3\mathbf{T}_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ -s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^4\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^5\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} c_6 & s_6 & 0 & 0 \\ -s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.1}
\end{aligned}$$

Овде су коришћени скраћени записи,  $\sin(q_i) = s_i$ ,  $\cos(q_i) = c_i$ ,  $\sin(q_i + q_j) = s_{ij}$ , и  $\cos(q_i + q_j) = c_{ij}$ . На основу ових матрица добијају се позиције и оријентације чланова робота и енд-ефектора у функцији променљивих  $q_i$ ,  $i = 1$  до 6 из следећих матрица:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & c_1 a_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & s_1 a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 & -c_1 c_2 & s_1 & c_1 v_5 \\ -s_1 s_2 & -s_1 c_2 & -c_1 & s_1 v_5 \\ c_2 & -s_2 & 0 & c_2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} -v_1 & s_1 & v_2 & X_6 \\ -v_3 & -c_1 & v_4 & Y_6 \\ c_{23} & 0 & s_{23} & Z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{T}_4 &= \begin{bmatrix} v_{15} & -v_2 & v_{16} & X_6 \\ v_{17} & -v_4 & v_{18} & Y_6 \\ v_{19} & -s_{23} & v_{20} & Z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} v_{21} & v_{16} & a_{x6} & X_6 \\ v_{23} & v_{18} & a_{y6} & Y_6 \\ v_{25} & v_{20} & a_{z6} & Z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} n_{x6} & o_{x6} & a_{x6} & X_6 \\ n_{y6} & o_{y6} & a_{y6} & Y_6 \\ n_{z6} & o_{z6} & a_{z6} & Z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= c_1 s_{23}, v_2 = c_1 c_{23}, v_3 = s_1 s_{23}, v_4 = s_1 c_{23}, v_5 = a_1 - v_{13}, v_{12} = c_{23} a_3 + s_{23} d_4, v_{13} = s_2 a_2, v_{14} = c_2 a_2, \\
v_{15} &= -v_1 c_4 - s_1 s_4, v_{16} = s_1 c_4 - v_1 s_4, v_{17} = c_1 s_4 - v_3 c_4, v_{18} = -v_3 s_4 - c_1 c_4, v_{19} = c_{23} c_4, v_{20} = c_{23} s_4, v_{21} = v_{15} c_5 - v_2 s_5, \\
v_{23} &= v_{17} c_5 - v_4 s_5, v_{25} = v_{19} c_5 - s_{23} s_5, v_{31} = d_4 c_{23} - s_{23} a_3, n_{x6} = v_{21} c_6 + v_{16} s_6, n_{y6} = v_{23} c_6 + v_{18} s_6, n_{z6} = v_{25} c_6 + v_{20} s_6, \\
o_{x6} &= v_{16} c_6 - v_{21} s_6, o_{y6} = v_{18} c_6 - v_{23} s_6, o_{z6} = v_{20} c_6 - v_{25} s_6, a_{x6} = v_{15} s_5 + v_2 c_5, a_{y6} = v_{17} s_5 + v_4 c_5, a_{z6} = v_{19} s_5 + s_{23} c_5, \\
X_6 &= c_1 v_0, Y_6 = s_1 v_0, Z_6 = v_{12} + v_{14}, v_0 = v_5 + v_{31}.
\end{aligned}$$

## Додатак Б. Вектори $\mathbf{b}_{ik}$ , $\mathbf{b}_{ikj}$ , $\mathbf{d}_{ik}$ и $\mathbf{d}_{ikj}$ робота Лола15

Угаоне брзине  $\boldsymbol{\omega}_i$ , угаона убрања  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ , линеарне брзине  $\mathbf{v}_i$ , и линеарна убрзања  $\dot{\mathbf{v}}_{i+1}$ ,  $i = 1$  до  $n$ , за робот који има  $n$  ротационих зглобова се рачунају из следећих једначина:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{i+1} &= \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{z}_i \dot{q}_{i+1}, \\
\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \mathbf{z}_i \ddot{q}_{i+1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{z}_i \dot{q}_{i+1}, \\
\mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \mathbf{p}_{i+1}^* \\
\dot{\mathbf{v}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{v}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} \times \mathbf{p}_{i+1}^* + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \mathbf{p}_{i+1}^*). \tag{B.1}
\end{aligned}$$

Вектори  $\mathbf{b}_{ik}$  и  $\mathbf{b}_{ikj}$  робота Лола15 се добијају помоћу једначина (4) и (Б.1):

$$\dot{\mathbf{v}}_1^{cm} = \begin{bmatrix} p_{y1}^* - r_{y1} & p_{x1}^* + r_{x1} & 0 \end{bmatrix}^T \ddot{q}_1 + \begin{bmatrix} -b_{11y} & b_{11x} & 0 \end{bmatrix}^T \dot{q}_1^2 \tag{B.2}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_2^{cm} = \begin{bmatrix} -s_1 v_5 - r_{y2} \\ c_1 v_5 + r_{x2} \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + \begin{bmatrix} c_1 v_6 \\ s_1 v_6 \\ -v_7 \end{bmatrix} \ddot{q}_2 + \begin{bmatrix} -b_{21y} \\ b_{21x} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} v_8 a_2 + s_1 v_{10} \\ v_9 a_2 - c_1 v_{10} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} c_1 v_7 \\ s_1 v_7 \\ v_{11} \end{bmatrix} \dot{q}_2^2, \quad (\text{B.3})$$

$v_6 = -r_{z2} - v_{14}$ ,  $v_7 = v_{13} - s_1 r_{y2} - c_1 r_{x2}$ ,  $v_8 = -c_1 s_2$ ,  $v_9 = -s_1 s_2$ ,  $v_{10} = 2r_{z2}$ ,  $v_{11} = r_{z2} - v_{14}$ ,  $v_{13}$ , и  $v_{14}$  су дати у једначини (A.2) и важи  $\mathbf{p}_1^* = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = a_1 [c_1 \ s_1 \ 0]^T$ .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i' = & \begin{bmatrix} -Y_6 - r_{yi} \\ X_6 + r_{xi} \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + \begin{bmatrix} -c_1 b_{i2} \\ -s_1 b_{i2} \\ b_{i3} - v_{13} \end{bmatrix} \ddot{q}_2 + \begin{bmatrix} -c_1 b_{i4} \\ -s_1 b_{i4} \\ b_{i3} \end{bmatrix} \ddot{q}_3 + \begin{bmatrix} -b_{i1y} \\ b_{i1x} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} b_{i5} + v_{81} \\ -b_{i6} + v_{91} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + \begin{bmatrix} b_{i5} \\ -b_{i6} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \begin{bmatrix} c_1 b_{i7} \\ s_1 b_{i7} \\ b_{i8} - v_{14} \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 + \begin{bmatrix} -c_1 b_{i3} \\ -s_1 b_{i3} \\ b_{i8} \end{bmatrix} (2\dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_3^2), \quad i=3,4,5,6, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$X_6$ ,  $Y_6$ , и  $v_{12}$  су дати у једначини (A.2) и важи  $b_{i2} = v_{12} + v_{14} + r_{zi}$ ,  $b_{i3} = v_{31} + b_{i9}$ ,  $b_{i4} = 2(v_{12} + r_{zi})$ ,  $b_{i5} = s_1 b_{i4}$ ,  $b_{i6} = c_1 b_{i4}$ ,  $b_{i7} = v_{13} - b_{i3}$ ,  $b_{i8} = v_{12} - r_{zi}$ ,  $b_{i9} = s_1 r_{yi} + c_1 r_{xi}$ ,  $v_{22} = v_{33} - s_{12}$ ,  $v_{26} = v_{22} a_2$ ,  $v_{24} = c_{12} - v_{32}$ ,  $v_{32} = v_{24} a_2$ .

$$\dot{\mathbf{v}}_i'' = \begin{bmatrix} b_{i10} \\ b_{i11} \\ b_{i12} \end{bmatrix} \ddot{q}_4 + [2 \begin{bmatrix} -b_{i11} \\ b_{i10} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} c_{23} r_{yi} - c_1 b_{i12} + v_4 v_9 \\ -c_{23} r_{xi} - s_1 b_{i12} - v_2 v_9 \\ b_{i13} + s_1 b_{i11} + c_1 b_{i10} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \begin{bmatrix} v_4 b_{i12} - s_{23} b_{i11} \\ s_{23} b_{i10} - v_2 b_{i12} \\ v_2 b_{i11} - v_4 b_{i10} \end{bmatrix} \dot{q}_4] \dot{q}_4, \quad (\text{B.5})$$

$$b_{i10} = v_4 r_{zi} - s_{23} r_{yi}, \quad b_{i11} = s_{23} r_{xi} - v_2 r_{zi}, \quad b_{i12} = v_2 r_{yi} - v_4 r_{xi}, \quad b_{i13} = v_3 r_{xi} - v_1 r_{yi}, \quad i=4,5,6.$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i''' = [b_{i16} \ b_{i15} \ b_{i14}]^T \ddot{q}_5 + [2 \begin{bmatrix} -b_{i15} \\ b_{i16} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + 2 \begin{bmatrix} -c_1 b_{i14} \\ -s_1 b_{i14} \\ b_{i17} - c_4 r_{zi} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2 \begin{bmatrix} v_4 b_{i14} - s_{23} b_{i15} \\ s_{23} b_{i16} - v_2 b_{i14} \\ v_2 b_{i15} - v_4 b_{i16} \end{bmatrix} \dot{q}_4 + \begin{bmatrix} v_{18} b_{i14} - v_{20} b_{i15} \\ v_{20} b_{i16} - v_{16} b_{i14} \\ v_{16} b_{i15} - v_{18} b_{i16} \end{bmatrix} \dot{q}_5] \dot{q}_5 \quad (\text{B.6})$$

$$b_{i14} = v_{16} r_{yi} - v_{18} r_{xi}, \quad b_{i15} = v_{20} r_{xi} - v_{16} r_{zi}, \quad b_{i16} = v_{18} r_{zi} - v_{20} r_{yi}, \quad b_{i17} = v_{20} (s_1 r_{xi} - c_1 r_{yi}), \quad i=5,6.$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_6^{cm} = & \dot{\mathbf{v}}_6' + \dot{\mathbf{v}}_6'' + \dot{\mathbf{v}}_6''' + \begin{bmatrix} v_{35} \\ v_{36} \\ v_{37} \end{bmatrix} \ddot{q}_6 + [2 \begin{bmatrix} -v_{36} \\ v_{35} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + 2 \begin{bmatrix} -c_1 v_{37} \\ -s_1 v_{37} \\ v_{70} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ & + \begin{bmatrix} v_{48} r_{z6} - v_{49} r_{y6} + v_{61} \\ v_{49} r_{x6} - v_{47} r_{z6} + v_{62} \\ v_{47} r_{y6} - v_{48} r_{x6} + v_{63} \end{bmatrix} \dot{q}_4 + \begin{bmatrix} 2(v_{71} + v_{64}) + v_{67} \\ 2(v_{72} + v_{65}) + v_{68} \\ 2(v_{73} + v_{66}) + v_{69} \end{bmatrix} \dot{q}_5 + \begin{bmatrix} v_{67} \\ v_{68} \\ v_{69} \end{bmatrix} \dot{q}_6] \dot{q}_6, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$a_{x6}$ ,  $a_{y6}$ , и  $a_{z6}$  су дати у једначини (A.2) и важи  $v_{35} = a_{y6} r_{z6} - a_{z6} r_{y6}$ ,  $v_{36} = a_{z6} r_{x6} - a_{x6} r_{z6}$ ,

$$v_{37} = a_{x6} r_{y6} - a_{y6} r_{x6}, \quad v_{47} = v_4 a_{z6} - s_{23} a_{y6}, \quad v_{48} = s_{23} a_{x6} - v_2 a_{z6}, \quad v_{49} = v_2 a_{y6} - v_4 a_{x6}, \quad v_{61} = v_4 v_{37} - s_{23} v_{36},$$

$$v_{62} = s_{23} v_{35} - v_2 v_{37}, \quad v_{63} = v_2 v_{36} - v_4 v_{35}, \quad v_{64} = -(v_{18} a_{y6} + v_{20} a_{z6}) r_{x6},$$

$$v_{65} = -(v_{20} a_{z6} + v_{16} a_{x6}) r_{y6}, \quad v_{66} = -(v_{16} a_{x6} + v_{18} a_{y6}) r_{z6}, \quad v_{67} = a_{y6} v_{37} - a_{z6} v_{36}, \quad v_{68} = a_{z6} v_{35} - a_{x6} v_{37},$$

$$v_{69} = a_{x6} v_{36} - a_{y6} v_{35},$$

$$v_{70}=s_1v_{36}+c_1v_{35}, v_{71}=(v_{20}r_{z6}+v_{18}r_{y6})a_{x6}, v_{72}=(v_{16}r_{x6}+v_{20}r_{z6})a_{y6}, v_{73}=(v_{18}r_{y6}+v_{16}r_{x6})a_{z6}.$$

Координате центара маса чланова и енд-ефектора робота Лола15 су:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_1^{\text{cm}} &= [-0,086 \ -0,1875 \ -0,00012]^T, \quad \hat{\mathbf{r}}_2^{\text{cm}} = [-0,4454 \ 0,0283 \ 0,0033]^T, \\ \hat{\mathbf{r}}_3^{\text{cm}} &= [0,00225 \ 0,00017 \ -0,7223]^T, \quad \hat{\mathbf{r}}_4^{\text{cm}} = [0,0 \ 0,212 \ 0,00082]^T, \quad \hat{\mathbf{r}}_5^{\text{cm}} = [0,0 \ 0,027 \ 0,007]^T, \\ \hat{\mathbf{r}}_6^{\text{cm}} &= [0,0 \ 0,0 \ 0,195]^T, \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{p}}_e = [0,12 \ 0,12 \ 0,35]^T. \end{aligned}$$

Вектори  $\mathbf{d}_{ik}$  и  $\mathbf{d}_{ikj}$  за робот Лола15 се добијају из једначина (7) и (Б.1) на следећи начин:

$$\mathbf{N}_1 = [0 \ 0 \ I_{z1}]^T \ddot{q}_1, \quad (\text{Б.8})$$

$$\mathbf{N}'_i = \begin{bmatrix} -I_{xzi} \\ -I_{yzi} \\ I_{zi} \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + \begin{bmatrix} d_{i1} \\ -d_{i2} \\ -d_{i3} \end{bmatrix} \ddot{q}_2 + \begin{bmatrix} I_{yzi} \\ -I_{xzi} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} c_1 d_{i4} \\ s_1 d_{i4} \\ -2d_{i5} \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} c_1 d_{i3} \\ s_1 d_{i3} \\ d_1 I_{xyi} + d_{i6} \end{bmatrix} \dot{q}_2^2, \quad (\text{Б.9})$$

$$d_1 = c_1^2 - s_1^2, \quad d_{i1} = I_{xi} s_1 + I_{xyi} c_1, \quad d_{i2} = I_{xyi} s_1 + I_{yi} c_1, \quad d_{i3} = I_{xzi} s_1 - I_{yzi} c_1, \quad d_{i4} = I_{xi} + I_{yi} - I_{zi},$$

$$d_{i5} = I_{xzi} c_1 + I_{yzi} s_1, \quad d_{i6} = s_1 c_1 (I_{xi} - I_{yi}), \quad i=2,3,4,5,6.$$

$$\mathbf{N}''_i = \mathbf{d}_{i3} \ddot{q}_3 + \mathbf{d}_{i13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \mathbf{d}_{i23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \mathbf{d}_{i33} \dot{q}_3^2,$$

$$\mathbf{d}_{i3} = \mathbf{d}_{i2}, \quad \mathbf{d}_{i13} = \mathbf{d}_{i12}, \quad \mathbf{d}_{i23} = 2\mathbf{d}_{i22}, \quad \text{and} \quad \mathbf{d}_{i33} = \mathbf{d}_{i22}, \quad i = 3,4,5,6. \quad (\text{Б.10})$$

$$\mathbf{N}'''_i = [d_{i7} \ d_{i8} \ d_{i9}]^T \ddot{q}_4 + \begin{bmatrix} 2I_{yzi} s_{23} - v_4 d_{i4} \\ v_2 d_{i4} - 2I_{xzi} s_{23} \\ 2d_{i10} \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} d_{i11} + v_4 d_{i3} + s_{23} d_{i2} - c_1 b_{i9} \\ d_{i12} + v_2 d_{i3} + s_{23} d_{i1} - s_1 d_{i9} \\ d_{i13} - v_4 d_{i1} - v_2 d_{i2} + s_1 d_{i8} + c_1 d_{i7} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \begin{bmatrix} v_4 d_{i9} + s_{23} d_{i8} \\ s_{23} d_{i7} - v_2 d_{i9} \\ v_2 d_{i8} - v_4 d_{i7} \end{bmatrix} \dot{q}_4 \dot{q}_4, \quad (\text{Б.11})$$

$$d_{i7} = I_{xi} v_2 - I_{xyi} v_4 - I_{xzi} s_{23}, \quad d_{i8} = I_{yi} v_4 - I_{xyi} v_2 - I_{yzi} s_{23}, \quad d_{i9} = I_{zi} s_{23} - I_{xzi} v_2 - I_{yzi} v_4, \quad d_{i10} = I_{xzi} v_4 - I_{yzi} v_2,$$

$$d_{i11} = I_{xi} v_1 - I_{xyi} v_3 - I_{xzi} c_{23}, \quad d_{i12} = I_{yi} v_3 - I_{xyi} v_1 - I_{yzi} c_{23}, \quad d_{i13} = I_{zi} c_{23} - I_{xzi} v_1 - I_{yzi} v_3, \quad i=4,5,6.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}''''_i &= \begin{bmatrix} d_{i14} \\ d_{i15} \\ d_{i16} \end{bmatrix} \ddot{q}_5 + \begin{bmatrix} d_{i18} - v_{18} d_{i4} \\ v_{16} d_{i4} - d_{i17} \\ 2d_{i19} \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} v_{20} d_{i2} - v_{18} d_{i3} - c_1 d_{i16} + d_{i21} \\ v_{16} d_{i3} + v_{20} d_{i1} - s_1 d_{i16} + d_{i22} \\ s_1 d_{i15} + c_1 d_{i14} - v_{16} d_{i2} - v_{18} d_{i1} + d_{i23} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ &+ \begin{bmatrix} d_{i24} + v_4 d_{i16} - s_{23} d_{i15} + v_{18} d_{i9} - v_{20} d_{i8} \\ d_{i25} - v_2 d_{i16} + s_{23} d_{i14} - v_{16} d_{i9} + v_{20} d_{i7} \\ d_{i26} + v_2 d_{i15} - v_4 d_{i14} + v_{16} d_{i8} - v_{18} d_{i7} \end{bmatrix} \dot{q}_4 + \begin{bmatrix} v_{18} d_{i16} - v_{20} d_{i15} \\ v_{20} d_{i14} - v_{16} d_{i16} \\ v_{16} d_{i15} - v_{18} d_{i14} \end{bmatrix} \dot{q}_5 \dot{q}_5, \quad (\text{Б.12}) \end{aligned}$$

$$d_{i14} = I_{xi} v_{16} - I_{xyi} v_{18} - I_{xzi} v_{20}, \quad d_{i15} = I_{yi} v_{18} - I_{xyi} v_{16} - I_{yzi} v_{20}, \quad d_{i16} = I_{zi} v_{20} - I_{xzi} v_{16} - I_{yzi} v_{18}, \quad d_{i17} = 2I_{xzi} v_{20},$$

$$d_{i18} = 2I_{yzi} v_{20}, \quad d_{i19} = I_{xzi} v_{18} - I_{yzi} v_{16}, \quad d_{i21} = I_{xi} v_{38} - I_{xyi} v_{39} - I_{xzi} v_{40}, \quad d_{i22} = I_{yi} v_{39} - I_{xyi} v_{38} - I_{yzi} v_{40},$$

$$d_{i23} = I_{zi} v_{40} - I_{xzi} v_{38} - I_{yzi} v_{39}, \quad d_{i24} = I_{xi} v_{41} - I_{xyi} v_{42} - I_{xzi} v_{43}, \quad d_{i25} = I_{yi} v_{42} - I_{xyi} v_{41} - I_{yzi} v_{43},$$

$$d_{i26} = I_{zi} v_{43} - I_{xzi} v_{41} - I_{yzi} v_{42}, \quad i=5,6.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_6 &= \mathbf{N}'_6 + \mathbf{N}''_6 + \mathbf{N}'''_6 + \mathbf{N}''''_6 + \mathbf{d}_{66} \ddot{q}_6 + \mathbf{d}_{616} \dot{q}_1 \dot{q}_6 + \mathbf{d}_{626} \dot{q}_2 \dot{q}_6 + \mathbf{d}_{636} \dot{q}_3 \dot{q}_6 + \mathbf{d}_{646} \dot{q}_4 \dot{q}_6 + \mathbf{d}_{656} \dot{q}_5 \dot{q}_6 + \mathbf{d}_{666} \dot{q}_6 \dot{q}_6 \\ &= \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \ddot{q}_6 + \begin{bmatrix} d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{bmatrix} \dot{q}_4 + \begin{bmatrix} d_{14} \\ d_{15} \\ d_{16} \end{bmatrix} \dot{q}_5 + \begin{bmatrix} d_4 a_{y6} - d_3 a_{z6} \\ d_2 a_{z6} - d_4 a_{x6} \\ d_3 a_{x6} - d_2 a_{y6} \end{bmatrix} \dot{q}_6 \dot{q}_6, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} d_2 &= I_{x6} a_{x6} - I_{xy6} a_{y6} - I_{xz6} a_{z6}, \quad d_3 = I_{y6} a_{y6} - I_{xy6} a_{x6} - I_{yz6} a_{z6}, \quad d_4 = I_{z6} a_{z6} - I_{xz6} a_{x6} - I_{yz6} a_{y6}, \\ d_5 &= -I_{x6} a_{y6} - I_{xy6} a_{x6}, \quad d_6 = I_{xy6} a_{y6} + I_{y6} a_{x6}, \quad d_7 = I_{xz6} a_{y6} - I_{yz6} a_{x6}, \quad d_8 = I_{x6} v_{44} - I_{xy6} v_{45} - I_{xz6} v_{46}, \\ d_9 &= I_{y6} v_{45} - I_{xy6} v_{44} - I_{yz6} v_{46}, \quad d_{10} = I_{z6} v_{46} - I_{xz6} v_{44} - I_{yz6} v_{45}, \quad d_{11} = I_{x6} v_{47} - I_{xy6} v_{48} - I_{xz6} v_{49}, \\ d_{12} &= I_{y6} v_{48} - I_{xy6} v_{47} - I_{yz6} v_{49}, \quad d_{13} = I_{z6} v_{49} - I_{xz6} v_{47} - I_{yz6} v_{48}, \quad d_{14} = I_{x6} v_{50} - I_{xy6} v_{51} - I_{xz6} v_{52}, \\ d_{15} &= I_{y6} v_{51} - I_{xy6} v_{50} - I_{yz6} v_{52}, \quad d_{16} = I_{z6} v_{52} - I_{xz6} v_{50} - I_{yz6} v_{51}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_i^{\text{cm}} = \mathbf{D}_i \hat{\mathbf{I}}_i^{\text{cm}} \mathbf{D}_i^T = \begin{bmatrix} I_{xi} & -I_{xyi} & -I_{xzi} \\ -I_{xyi} & I_{yi} & -I_{yzi} \\ -I_{xzi} & -I_{yzi} & I_{zi} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{I}}_i^{\text{cm}} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I}_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{I}_{zi} \end{bmatrix}, \quad i=1 \text{ to } 6. \quad (\text{B.14})$$

$\hat{\mathbf{I}}_i^{\text{cm}}$  је  $3 \times 3$  константна матрица инерција члана  $i$  у односу на центар масе тог члана изражена у координатама члана  $i$ . Овде су узети у обзир само аксијални моменти инерције  $\hat{I}_{xi}$ ,  $\hat{I}_{yi}$  и  $\hat{I}_{zi}$  чланова робота у односу на  $x$ ,  $y$  и  $z$  осу. Центрифугални моменти инерције се сматрају занемарљиво малим. Из Satia софтвера су добијене следеће вредности аксијалних момената инерције и маса чланова робота Лола15:  $\hat{I}_{y1} = 19$ ,  $\hat{I}_{x2} = 1,157$ ,  $\hat{I}_{y2} = 21,185$ ,  $\hat{I}_{z2} = 21,75$ ,  $\hat{I}_{x3} = 45$ ,  $\hat{I}_{y3} = 45,1$ ,  $\hat{I}_{z3} = 0,478$ ,  $\hat{I}_{x4} = 2,691$ ,  $\hat{I}_{y4} = 0,23$ ,  $\hat{I}_{z4} = 2,7$ ,  $\hat{I}_{x5} = 0,014$ ,  $\hat{I}_{y5} = 0,008$ ,  $\hat{I}_{z5} = 0,011$ ,  $\hat{I}_{x6} = 0,273$ ,  $\hat{I}_{y6} = 0,272$ , и  $\hat{I}_{z6} = 0,004 \text{ kgm}^2$ ,  $m_1 = 252$ ,  $m_2 = 86,2$ ,  $m_3 = 81$ ,  $m_4 = 45$ ,  $m_5 = 4,5$  и  $m_6 = 11 \text{ kg}$ . Овде се  $\hat{I}_{x6}$ ,  $\hat{I}_{y6}$ ,  $\hat{I}_{z6}$ , и  $m_6$  односе на структуру коју чине члан 6 и енд-ефектор.

## Додатак В.

Табела В.1

Рачунска сложеност развијеног  $O(n)$  алгоритма директне динамике робота Лола15

### Директна рекурзија

Члан	Збир рачунских операција дат по векторима који се израчунавају	Укупан збир
1 до 6	$\mathbf{r}_1^{\text{cm}} : 4\text{M}2\text{A}$ , $\mathbf{r}_2^{\text{cm}} : 12\text{M}5\text{A}$ , $\mathbf{r}_3^{\text{cm}} : 12\text{M}7\text{A}$ , $\mathbf{r}_4^{\text{cm}} : 19\text{M}9\text{A}$ , $\mathbf{r}_5^{\text{cm}} : 21\text{M}12\text{A}$ , $\mathbf{r}_6^{\text{cm}} : 21\text{M}12\text{A}$ , једначина (4); $\mathbf{p}_e : 9\text{M}6\text{A}$ , једначина (11); $\mathbf{I}_1 : 0\text{M}2\text{A}$ , $\mathbf{I}_2 : 2\text{M}3\text{A}$ , $\mathbf{I}_3 : 0\text{M}3\text{A}$ , $\mathbf{I}_4 = \mathbf{r}_4^{\text{cm}} : 0\text{M}0\text{A}$ , $\mathbf{I}_5 = \mathbf{r}_5^{\text{cm}} : 0\text{M}0\text{A}$ , $\mathbf{I}_6 = \mathbf{r}_6^{\text{cm}} : 0\text{M}0\text{A}$ , $\mathbf{p}_1^* : 2\text{M}0\text{A}$ , $\mathbf{p}_2^* : 3\text{M}0\text{A}$ , $\mathbf{p}_3^* : 6\text{M}2\text{A}$ , једначина (19);	109M63A
1 до 6	$\mathbf{I}_1^{\text{cm}} : 6\text{M}3\text{A}$ , $\mathbf{I}_2^{\text{cm}} : 11\text{M}6\text{A}$ , $\mathbf{I}_3^{\text{cm}} : 13\text{M}6\text{A}$ , $\mathbf{I}_4^{\text{cm}} : 36\text{M}12\text{A}$ , $\mathbf{I}_5^{\text{cm}} : 36\text{M}12\text{A}$ , $\mathbf{I}_6^{\text{cm}} : 36\text{M}12\text{A}$ , једначина (B.14)	138M51A
1	$\mathbf{b}_{11} : 0\text{M}2\text{A}$ , $\mathbf{b}_{111} : 0\text{M}0\text{A}$ , једначина (37)	0M2A

2	<b>b</b> <sub>21</sub> :3М2А, <b>b</b> <sub>22</sub> :5М4А, <b>b</b> <sub>211</sub> :0М0А, <b>b</b> <sub>212</sub> :5М2А, <b>b</b> <sub>222</sub> :2М0А, једначина (38)	15М8А
3	<b>b</b> <sub>31</sub> : 2М4А, <b>b</b> <sub>32</sub> :4М3А, <b>b</b> <sub>33</sub> :4М3А, <b>b</b> <sub>311</sub> :0М0А, <b>b</b> <sub>312</sub> :4М3А, <b>b</b> <sub>313</sub> :2М2А, <b>b</b> <sub>322</sub> :2М3А, <b>b</b> <sub>323</sub> : 3М0А, <b>b</b> <sub>333</sub> : 2М0А, једначина (39)	23М18А
4	<b>b</b> <sub>41</sub> : 0М2А, <b>b</b> <sub>42</sub> :4М1А, <b>b</b> <sub>43</sub> :3М1А, <b>b</b> <sub>44</sub> :6М3А, једначина (41); <b>b</b> <sub>411</sub> :0М0А, <b>b</b> <sub>412</sub> :2М2А, <b>b</b> <sub>413</sub> :2М0А, једначина (39); <b>b</b> <sub>414</sub> :2М0А, једначина (41); <b>b</b> <sub>422</sub> :2М3А, <b>b</b> <sub>423</sub> :3М0А, <b>b</b> <sub>433</sub> :2М0А, једначина (39); <b>b</b> <sub>424</sub> :10М7А, <b>b</b> <sub>434</sub> :0М0А, <b>b</b> <sub>444</sub> :6М3А, једначина (41)	42М22А
5	<b>b</b> <sub>51</sub> : 0М2А, <b>b</b> <sub>52</sub> :4М5А, <b>b</b> <sub>53</sub> :3М1А, једначина (39); <b>b</b> <sub>54</sub> :6М3А, једначина (41); <b>b</b> <sub>55</sub> :6М3А, једначина (43); <b>b</b> <sub>511</sub> :0М0А, <b>b</b> <sub>512</sub> :2М2А, <b>b</b> <sub>513</sub> :0М0А, једначина (39); <b>b</b> <sub>514</sub> :2М0А, једначина (41); <b>b</b> <sub>515</sub> :2М0А, једначина (43); <b>b</b> <sub>522</sub> :2М3А, <b>b</b> <sub>523</sub> :3М0А, једначина (39); <b>b</b> <sub>524</sub> :10М7А, једначина (41); <b>b</b> <sub>525</sub> :7М2А, једначина (43); <b>b</b> <sub>533</sub> :2М0А, једначина (39); <b>b</b> <sub>534</sub> :0М0А, једначина (41); <b>b</b> <sub>535</sub> :0М0А, једначина (43); <b>b</b> <sub>544</sub> :6М3А, једначина (41); <b>b</b> <sub>545</sub> :9М3А, <b>b</b> <sub>555</sub> :6М3А, једначина (43)	70М38А
6	<b>b</b> <sub>61</sub> :0М2А, <b>b</b> <sub>62</sub> :4М3А, <b>b</b> <sub>63</sub> :3М2А, једначина (39); <b>b</b> <sub>64</sub> :6М3А, једначина (41); <b>b</b> <sub>65</sub> :6М3А, једначина (43); <b>b</b> <sub>66</sub> :6М3А, једначина (44); <b>b</b> <sub>611</sub> :0М0А, <b>b</b> <sub>612</sub> :2М2А, <b>b</b> <sub>613</sub> :2М0А, једначина (39); <b>b</b> <sub>614</sub> :2М0А, једначина (41); <b>b</b> <sub>615</sub> :2М0А, једначина (43); <b>b</b> <sub>616</sub> :2М0А, једначина (44); <b>b</b> <sub>622</sub> :2М3А, <b>b</b> <sub>623</sub> :3М0А, једначина (39); <b>b</b> <sub>624</sub> :10М7А, једначина (41); <b>b</b> <sub>625</sub> :7М2А, једначина (43); <b>b</b> <sub>626</sub> :5М1А, једначина (44); <b>b</b> <sub>633</sub> :2М0А, једначина (39); <b>b</b> <sub>634</sub> :0М0А, једначина (41); <b>b</b> <sub>635</sub> :0М0А, једначина (43); <b>b</b> <sub>636</sub> :0М0А, једначина (44); <b>b</b> <sub>644</sub> :2М1А, једначина (41); <b>b</b> <sub>645</sub> :9М3А, једначина (43); <b>b</b> <sub>646</sub> :18М12А, једначина (44); <b>b</b> <sub>655</sub> :6М3А, једначина (43); <b>b</b> <sub>656</sub> :27М15А, <b>b</b> <sub>666</sub> :0М0А, једначина (44)	126М65А
1	<b>e</b> <sub>1</sub> :6М0А, једначина (13); <b>e</b> <sub>11</sub> :2М0А, једначина (15)	8М0А
2	<b>e</b> <sub>2</sub> :9М5А, једначина (13); <b>e</b> <sub>21</sub> :2М0А, <b>e</b> <sub>22</sub> :3М0А, једначина (15)	14М5А
3	<b>e</b> <sub>3</sub> :18М13А, једначина (13); <b>e</b> <sub>31</sub> :2М0А, <b>e</b> <sub>32</sub> :3М0А, <b>e</b> <sub>33</sub> :3М0А, једначина (15)	26М13А
4	<b>e</b> <sub>4</sub> :26М26А, једначина (13); <b>e</b> <sub>41</sub> :2М0А, <b>e</b> <sub>42</sub> :3М0А, <b>e</b> <sub>43</sub> :3М0А, <b>e</b> <sub>44</sub> :3М0А, једначина (15)	37М26А
5	<b>e</b> <sub>5</sub> :41М35А, једначина (13); <b>e</b> <sub>51</sub> :2М0А, <b>e</b> <sub>52</sub> :3М0А, <b>e</b> <sub>53</sub> :3М0А, <b>e</b> <sub>54</sub> :3М0А, <b>e</b> <sub>55</sub> :3М0А, једначина (15)	55М35А
6	<b>e</b> <sub>6</sub> :59М50А, једначина (14); <b>e</b> <sub>61</sub> :2М0А, <b>e</b> <sub>62</sub> :3М0А, <b>e</b> <sub>63</sub> :3М0А, <b>e</b> <sub>64</sub> :3М0А, <b>e</b> <sub>65</sub> :3М0А, <b>e</b> <sub>66</sub> :3М0А, једначина (15)	76М50А
1	<b>d</b> <sub>1</sub> :0М0А, једначина (17); <b>d</b> <sub>11</sub> :0М0А, <b>d</b> <sub>111</sub> :0М0А, једначина (41)	0М0А
2	<b>d</b> <sub>2</sub> :6М3А, једначина (17); <b>d</b> <sub>21</sub> :0М0А, <b>d</b> <sub>22</sub> :6М3А, <b>d</b> <sub>211</sub> :0М0А, <b>d</b> <sub>212</sub> :5М3А, <b>d</b> <sub>222</sub> :4М2А, једначина (47)	21М11А
3	<b>d</b> <sub>3</sub> : 11М9А, једначина (17); <b>d</b> <sub>31</sub> : 0М0А, <b>d</b> <sub>32</sub> : 6М3А, једначина (47); <b>d</b> <sub>33</sub> : 0М0А, једначина (49); <b>d</b> <sub>311</sub> :0М0А, <b>d</b> <sub>312</sub> :5М3А, једначина (47); <b>d</b> <sub>313</sub> :0М0А, једначина (49); <b>d</b> <sub>322</sub> :4М3А, једначина (47); <b>d</b> <sub>323</sub> :3М0А, <b>d</b> <sub>333</sub> :0М0А, једначина (49)	26М18А
4	<b>d</b> <sub>4</sub> : 20М17А, једначина (17); <b>d</b> <sub>41</sub> :0М0А, <b>d</b> <sub>42</sub> :6М3А, једначина (47); <b>d</b> <sub>43</sub> :0М0А, једначина (49); <b>d</b> <sub>44</sub> : 9М6А, једначина (51); <b>d</b> <sub>411</sub> :0М0А, <b>d</b> <sub>412</sub> :2М2А, једначина (47); <b>d</b> <sub>413</sub> :0М0А, једначина (49); <b>d</b> <sub>414</sub> :9М3А, једначина (51); <b>d</b> <sub>422</sub> :4М2А, једначина (47); <b>d</b> <sub>423</sub> :3М0А, <b>d</b> <sub>433</sub> :0М0А, једначина (49); <b>d</b> <sub>424</sub> :19М16А, <b>d</b> <sub>434</sub> :0М0А, <b>d</b> <sub>444</sub> :6М3А, једначина (51)	78М52А
5	<b>d</b> <sub>5</sub> : 32М30А, једначина (17); <b>d</b> <sub>51</sub> :0М0А, <b>d</b> <sub>52</sub> :6М3А, једначина (47); <b>d</b> <sub>53</sub> :0М0А, једначина (49); <b>d</b> <sub>54</sub> : 9М6А, једначина (51); <b>d</b> <sub>55</sub> :9М6А, једначина (53); <b>d</b> <sub>511</sub> :0М0А, <b>d</b> <sub>512</sub> :2М2А, једначина (47); <b>d</b> <sub>513</sub> :0М0А, једначина (49); <b>d</b> <sub>514</sub> :7М3А, једначина (51); <b>d</b> <sub>515</sub> :8М3А, једначина (53); <b>d</b> <sub>522</sub> :4М2А, једначина (47); <b>d</b> <sub>523</sub> :3М0А, једначина (49); <b>d</b> <sub>524</sub> :21М18А, једначина (51); <b>d</b> <sub>525</sub> :19М16А, једначина (53); <b>d</b> <sub>533</sub> :0М0А, једначина (49); <b>d</b> <sub>534</sub> :0М0А, једначина (51); <b>d</b> <sub>535</sub> :0М0А, једначина (53); <b>d</b> <sub>544</sub> :6М3А, једначина (51); <b>d</b> <sub>545</sub> :21М18А, <b>d</b> <sub>555</sub> :6М3А, једначина (53)	153М113А
6	<b>d</b> <sub>6</sub> : 56М53А, једначина (17); <b>d</b> <sub>61</sub> :0М0А, <b>d</b> <sub>62</sub> :6М3А, једначина (47); <b>d</b> <sub>63</sub> :0М0А, једначина (49); <b>d</b> <sub>64</sub> : 9М6А, једначина (51); <b>d</b> <sub>65</sub> :9М6А, једначина (53); <b>d</b> <sub>66</sub> :9М6А, једначина (55); <b>d</b> <sub>611</sub> :0М0А, <b>d</b> <sub>612</sub> :2М2А, једначина (47); <b>d</b> <sub>613</sub> :0М0А, једначина (49); <b>d</b> <sub>614</sub> :7М3А, једначина (51); <b>d</b> <sub>615</sub> :7М3А, једначина (53); <b>d</b> <sub>616</sub> :6М3А, једначина (55);	246М176А

$\mathbf{d}_{622}$ :4M2A, једначина (47);  
 $\mathbf{d}_{623}$ :3M0A, једначина (49);  $\mathbf{d}_{624}$ :21M18A, једначина (51);  $\mathbf{d}_{625}$ :19M16A, једначина (53);  $\mathbf{d}_{626}$ :13M7A, једначина (55);  $\mathbf{d}_{633}$ :0M0A, једначина (49);  $\mathbf{d}_{634}$ :0M0A, једначина (51);  $\mathbf{d}_{635}$ :0M0A, једначина (53);  $\mathbf{d}_{636}$ :0M0A, једначина (55);  $\mathbf{d}_{644}$ :6M3A, једначина (51);  $\mathbf{d}_{645}$ :21M18A, једначина (53);  $\mathbf{d}_{646}$ :15M9A, једначина (55);  
 $\mathbf{d}_{655}$ :6M3A, једначина (53);  $\mathbf{d}_{656}$ :27M15A,  $\mathbf{d}_{666}$ :0M0A, једначина (55)

---

**Инверзна рекурзија**

---

6 до 1	$\mathbf{n}'_{6c}$ :12M12A, једначина (56); $\mathbf{n}'_{5c}$ :6M9A, једначина (57); $\mathbf{n}'_{4c}$ :6M9A, једначина (58); $\mathbf{n}'_{3c}$ :12M24A, једначина (59); $\mathbf{n}'_{2c}$ :12M18A, једначина (60); $\mathbf{n}'_{1c}$ :4M6A, једначина (61)	52M78A
6 до 1	$\mathbf{n}'_{6a1}$ :34M34A, једначина (52); $\mathbf{n}'_{5a1}$ :28M43A, једначина (63); $\mathbf{n}'_{4a1}$ :22M34A, једначина (64); $\mathbf{n}'_{3a1}$ :16M25A, једначина (65); $\mathbf{n}'_{2a1}$ :10M16A, једначина (66); $\mathbf{n}'_{1a1}$ :2M3A; једначина (67)	112M155A
6 до 1	$\mathbf{n}'_{6a2}$ :0M0A; $\mathbf{n}'_{5a2}$ :0M0A; $\mathbf{n}'_{4a2}$ :0M0A; $\mathbf{n}'_{3a2}$ :22M33A, једначина(68); $\mathbf{n}'_{2a2}$ :16M24A, једначина (69); $\mathbf{n}'_{1a2}$ :4M8A, једначина (70)	42M65A
6 до 1	$\mathbf{n}'_{6a3}$ :0M0A; $\mathbf{n}'_{5a3}$ :0M0A; $\mathbf{n}'_{4a3}$ :0M0A; $\mathbf{n}'_{3a3}$ :8M7A једначина (71); $\mathbf{n}'_{2a3}$ :18M13A једначина (72); $\mathbf{n}'_{1a3}$ :8M9A једначина (73)	34M29A
6 до 1	$u_1$ :6M9A, $u_2$ :20M22A, $u_3$ :20M20A, $u_4$ :27M15A, $u_5$ :27M15, $u_6$ :27M15A, једначине (40) и (41) $\ddot{q}_j, j = 1$ до 6 прорачун: Решавање система линеарних једначина (34) употребом Гусове елиминације	127M97A 106M91A

**УКУПНО:  
1735M 1275A**

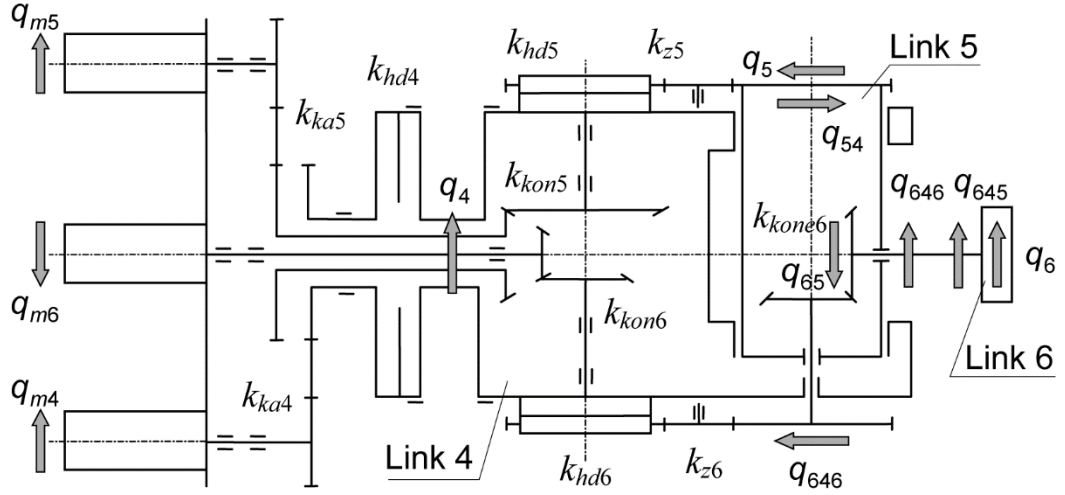
---

### Додатак Г. Коefицијенти динамичког модела робота Лола15 у функцији момената мотора

Са слике 3(b) може се видети да кретање члана 2 робота Лола15 доводи до кретања члана 3 (геометријско купловање, тј. спрегнутост). Из овог разлога, неопходно је да ротор актуатора члана 3 врши ротацију када и члан 2, тако да ће важити следеће:

$$q_{a3} = k_3(q_3 + q_2/k_2) \quad (Г.1)$$

На слици Г.1 приказани су ефекти геометријског купловања при кретању чланова 4, 5, and 6 (*wrist* робота Лола15). Са слике се види да се обртањем члана 4 уједно обрће и члан 5 (ротација  $q_{54}$ ), као и члан 6 на два начина: преко преносника члана 6 (ротација  $q_{646}$ ) и преко преносника члана 5 (ротација  $q_{645}$ ). Обртањем члана 5 се уједно обрће и члан 6 (ротација  $q_{65}$ ).



Слика Г.1. Ефекти геометријског купловања чланова 4, 5 и 6 робота Лола15.

Да би се спречила нежељена кретања чланова робота услед геометријског купловања, потребно је да када ротор мотора члана 4 ротира ротирају и ротори мотора чланова 5 и 6. Из истог разлога, када се ротор мотора члана 5 обрће, ротор мотора члана 6 мора да ротира. Преносни односи робота Лола 15 су  $k_1 = 120$ ,  $k_2 = k_3 = 119$ ,  $k_4 = k_{ka4}k_{hd4}$ ,  $k_5 = k_{ka5}k_{kon5}k_{hd5}k_{z5}$ ,  $k_6 = k_{kon6}k_{hd6}k_{z6}k_{kone6}$ ,  $k_{54} = k_{ka5}$ ,  $k_{64} = -1$ ,  $k_{65} = k_6$ ,  $k_{ka4} = k_{ka5} = 24/14$ ,  $k_{hd4} = 78$ ,  $k_{hd5} = 120$ ,  $k_{hd6} = 50$ ,  $k_{kon5} = k_{kon6} = 1,6$ ,  $k_{kone6} = 1$ , and  $k_{z5} = k_{z6} = 10/15$ . Последишно, важи следеће:

$$q_{a5} = k_5 q_5 + k_{54} q_4, \text{ и } q_{a6} = k_6 q_6 + k_{64} q_4 + k_{65} q_5. \quad (\text{Г.2})$$

Коефицијенти трења мировања и вискозног трења су  $\mu_{s1} = \mu_{s2} = \mu_{s3} = \mu_{s4} = 0,22$ ,  $\mu_{s5} = 0,35$ ,  $\mu_{s6} = 0,21$ ,  $f_{v1} = f_{v2} = f_{v3} = 0,00025$ ,  $f_{v4} = f_{v6} = 0,002$ ,  $f_{v5} = 0,003$ .

Када се узму у обзир коефицијенти статичког  $\mu_{si}$  и вискозног  $f_{vi}$  трења, преносни односи  $k_i$  и моменти инерције актуатора  $I_{ai}$  робота Лола15, коефицијенти  $u'_{ai}$  и  $h_{aij}$ , једначине (77)–(79), постају:

$$\begin{aligned} u'_{a1} &= [u'_1 + \mu_{s1} \text{sign}(\dot{q}_1) u_1] / k_1 + k_1 f_{v1} \dot{q}_{1prev}, \quad i=1,2,4, \\ u'_{a3} &= [u'_3 + \mu_{s3} \text{sign}(\dot{q}_3) u_3] / k_3 + k_3 f_{v3} (\dot{q}_{2prev} / k_2 + \dot{q}_{3prev}), \\ u'_{a5} &= [u'_5 + \mu_{s5} \text{sign}(\dot{q}_5) u_5] / k_5 + f_{v5} (k_{54} \dot{q}_{4prev} + k_5 \dot{q}_{5prev}), \\ u'_{a6} &= [u'_6 + \mu_{s6} \text{sign}(\dot{q}_6) u_6] / k_6 + f_{v6} (k_{64} \dot{q}_{4prev} + k_{65} \dot{q}_{5prev} + k_6 \dot{q}_{6prev}), \\ h_{a1i} &= h_{ii} / k_i + k_i (I_{ai} + f_{vi} \Delta t), \quad i=1,2,4, \\ h_{a32} &= h_{32} / k_3 + k_3 (I_{a3} + f_{v3} \Delta t) / k_2, \quad h_{a33} = h_{33} / k_3 + k_3 (I_{a3} + f_{v3} \Delta t), \\ h_{a54} &= a_{54} / k_5 + k_{54} (I_{a5} + f_{v5} \Delta t), \quad h_{a55} = h_{55} / k_5 + k_5 (I_{a5} + f_{v5} \Delta t), \\ h'_{a64} &= h_{64} / k_6 + k_{64} (I_{a6} + f_{v6} \Delta t), \quad h'_{a65} = h_{65} / k_6 + k_{65} (I_{a6} + f_{v6} \Delta t), \\ h'_{a66} &= h_{66} / k_6 + k_6 (I_{a6} + f_{v6} \Delta t), \end{aligned} \quad (\text{Г.3})$$

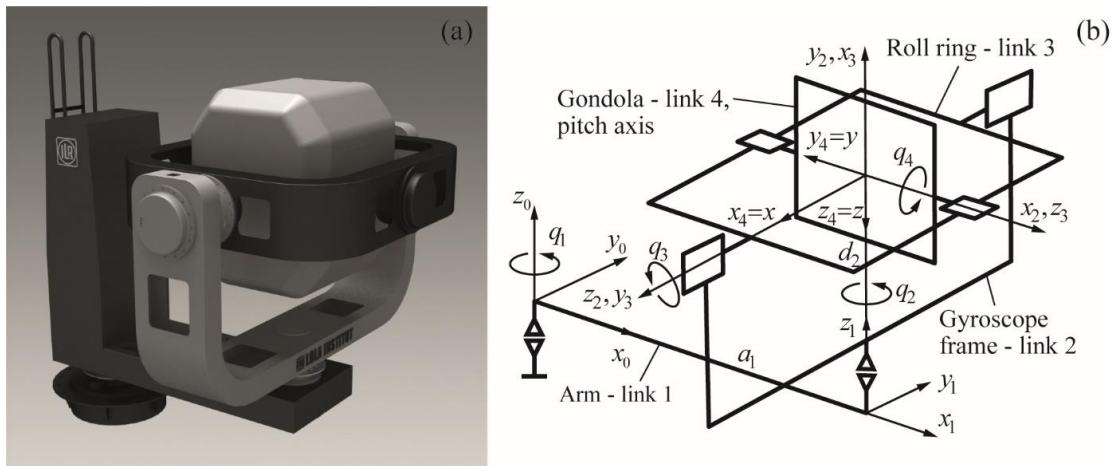
где је  $h_{aij} = h_{ij} / k_i$ ,  $i = 1$  и  $j = 2, 3, 4, 5, 6$  или  $i = 2$  и  $j = 1, 3, 4, 5, 6$  или  $i = 3$  и  $j = 1, 4, 5, 6$ , или  $i = 4$  и  $j = 1, 2, 3, 5, 6$  или  $i = 5$  и  $j = 1, 2, 3, 6$  или  $i = 6$  и  $j = 1, 2, 3$ .

## Додатак Д. Параметри мотора робота Лола15

Осе 1 и 3 робота Лола15 покрећу се моторима чији максимални мометни износе 17,8 Nm. Максимална брзина обртања је  $3150 \text{ min}^{-1}$ . Осу 2 покреће мотор који може да оствари максимални момент од 38,6 Nm и има максималну брзину обртања  $2800 \text{ min}^{-1}$ . Осе 4, 5 и 6 покрећу се моторима чији максимални мометни износе 3,47 Nm, и остварују максималну брзину обртања  $3400 \text{ min}^{-1}$ . Моменти инерције ротора са преносником су следствено  $I_{a1} = I_{a3} = 0,0042$ ,  $I_{a2} = 0,009$ ,  $I_{a3} = 0,0008$ ,  $I_{a5} = 0,001$ ,  $I_{a6} = 0,0007 \text{ kgm}^2$ .

## Додатак Е. Нумерички пример (*toy model*) на 4-осном Уређају за просторну дезоријентацију пилота (УПДП)

Нумерички пример (*toy model*, *енг.*) за 4-осни УПДП уређај је дат како би се илустровали кључни кораци предложеног метода. УПДП уређај је моделован као 4-осни роботски манипулатор са ротационим зглобовима, слика Е1. Вектори  $\mathbf{e}_{ik}$ ,  $\mathbf{d}_i$ ,  $\mathbf{d}_{ik}$  и  $\mathbf{r}_i^{\text{cm}}$ , неопходни за прорачун вектора  $\mathbf{n}_{ic}$ ,  $\mathbf{n}_{ic}$ ,  $\mathbf{n}_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}_{ia2}$  и  $\mathbf{n}_{ia3}$ , једначине (22)–(26), су дати у [27]. Овде важи да је  $\mathbf{p}_1^* = a_1 [c_1 \ s_1 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{p}_2^* = [0 \ 0 \ d_2]^T$ ,  $\mathbf{p}_3^* = \mathbf{p}_4^* = \mathbf{p}_5^* = \mathbf{0}$ .



Слика Е1. (а) 3Д модел УПДП уређаја са 4 степена слобде. (б) КС УПДПа

Вектори  $\mathbf{n}'_{ic}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia2}$  и  $\mathbf{n}'_{ia3}$ , једначине (22)–(31), за УПДП су:

$$\mathbf{n}_{4c} = \mathbf{d}_4 + \mathbf{l}_4 \times \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{n}_{3c} = \mathbf{d}_3 + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{n}_{2c} = \mathbf{d}_2 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{n}_{1c} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{E}_2, \quad (\text{E.1})$$

где је  $\mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ ,  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_2$ ,

$$\mathbf{n}_{4a1} = \sum_{k=1}^4 (\mathbf{d}_{4k} + \mathbf{l}_4 \times \mathbf{e}_{4k}) \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^4 \mathbf{n}_{4ka1} \ddot{q}_k, \quad \mathbf{n}_{3a1} = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{d}_{3k} + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{e}_{3k}) \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^3 \mathbf{n}_{3ka1} \ddot{q}_k, \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbf{n}_{2a1} = \sum_{k=1}^2 (\mathbf{d}_{2k} + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{e}_{2k}) \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}_{2ka1} \ddot{q}_k, \quad \mathbf{n}_{1a1} = (\mathbf{d}_{11} + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{11}) \ddot{q}_1 = \mathbf{n}_{11a1} \ddot{q}_1, \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{n}'_{4a1} = [\mathbf{n}_{41a1} \ \mathbf{n}_{42a1} \ \mathbf{n}_{43a1} \ \mathbf{n}_{44a1}] = [\mathbf{d}_{41} + \mathbf{I}_4 \times \mathbf{e}_{41} \ \mathbf{d}_{42} + \mathbf{I}_4 \times \mathbf{e}_{42} \ \mathbf{d}_{43} + \mathbf{I}_4 \times \mathbf{e}_{43} \ \mathbf{d}_{44} + \mathbf{I}_4 \times \mathbf{e}_{44}], \quad (\text{E.4})$$

$$\mathbf{n}'_{3a1} = \mathbf{n}_{3a1} + \mathbf{n}_{4a1} = [\mathbf{n}'_{31a1} \ \mathbf{n}'_{32a1} \ \mathbf{n}'_{33a1} \ \mathbf{n}'_{44a1}] = \left[ \sum_{k=3}^4 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{I}_k \times \mathbf{e}_{k1}) \ \sum_{k=3}^4 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{I}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \ \sum_{k=3}^4 (\mathbf{d}_{k3} + \mathbf{I}_k \times \mathbf{e}_{k3}) \ \mathbf{n}'_{44a1} \right], \quad (\text{E.5})$$

$$\mathbf{n}'_{2a1} = \mathbf{n}_{2a1} + \mathbf{n}'_{3a1} = [\mathbf{n}'_{21a1} \ \mathbf{n}'_{22a1} \ \mathbf{n}'_{33a1} \ \mathbf{n}'_{44a1}] = \left[ \sum_{k=2}^4 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{I}_k \times \mathbf{e}_{k1}) \ \sum_{k=2}^4 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{I}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \ \mathbf{n}'_{33a1} \ \mathbf{n}'_{44a1} \right], \quad (\text{E.6})$$

$$\mathbf{n}'_{1a1} = \mathbf{n}_{1a1} + \mathbf{n}'_{2a1} = [\mathbf{n}'_{11a1} \ \mathbf{n}'_{22a1} \ \mathbf{n}'_{33a1} \ \mathbf{n}'_{44a1}] = \left[ \sum_{k=1}^4 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{I}_k \times \mathbf{e}_{k1}) \ \mathbf{n}'_{22a1} \ \mathbf{n}'_{33a1} \ \mathbf{n}'_{44a1} \right], \quad (\text{E.7})$$

$$\mathbf{n}_{4a2} = \mathbf{0}, \ \mathbf{p}_3^* = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{n}_{3a2} = \mathbf{0}, \ \mathbf{n}'_{4a2} = \mathbf{n}'_{3a2} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}], \quad (\text{E.8})$$

$$\mathbf{n}'_{2a2} = [\mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{31} \ \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{32} \ \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{33} \ \mathbf{0}], \quad (\text{E.9})$$

$$\mathbf{n}'_{1a2} = [\mathbf{p}_1^* \times \mathbf{E}_{21} + \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{31} \ \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{E}_{22} + \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{32} \ \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{33} \ \mathbf{0}], \quad (\text{E.10})$$

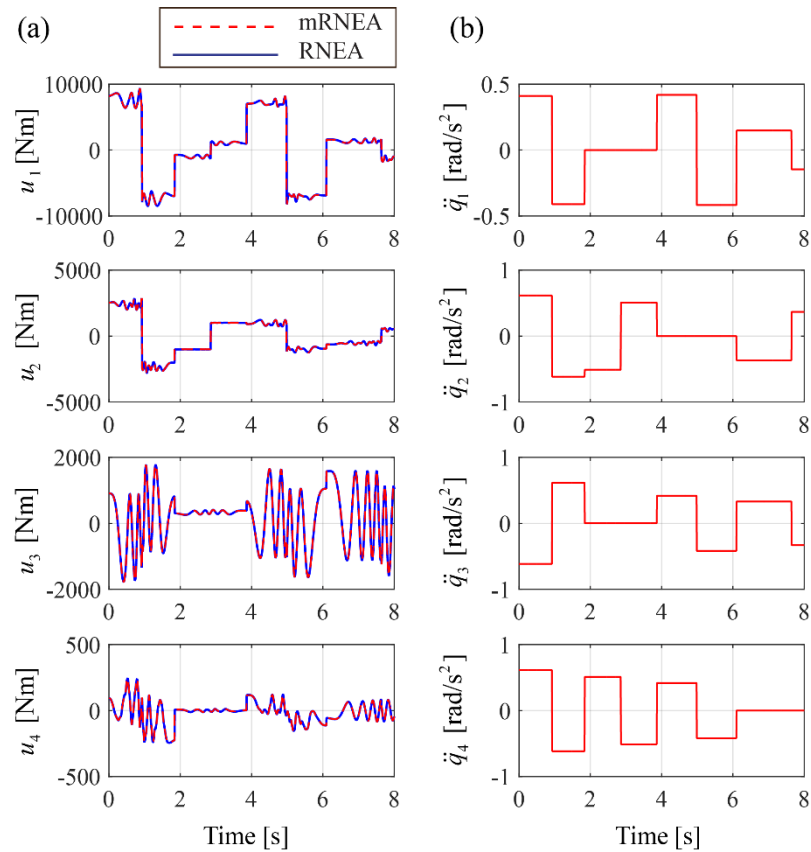
$$\mathbf{E}_{31} = \mathbf{e}_{41} + \mathbf{e}_{31}, \ \mathbf{E}_{32} = \mathbf{e}_{42} + \mathbf{e}_{32}, \ \mathbf{E}_{33} = \mathbf{e}_{43} + \mathbf{e}_{33}, \ \mathbf{E}_{21} = \mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{21}, \ \mathbf{E}_{22} = \mathbf{e}_{32} + \mathbf{e}_{22}, \quad (\text{E.11})$$

$$\mathbf{n}'_{2a3} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{44}], \ \mathbf{n}'_{1a3} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{E}_{33} \ (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^*) \times \mathbf{E}_{44}], \text{ where } \mathbf{E}_{44} = \mathbf{e}_{44}. \quad (\text{E.12})$$

Вектори  $\mathbf{z}_{i-1}^T$ , неопходни за прорачун момената  $u_i$ , једначине (34)–(36), су дати у једначини (E13). Овде су коришћени МХТ за УПДП, дати у [27].

$$\mathbf{z}_0^T = [0 \ 0 \ 1], \ \mathbf{z}_1^T = [0 \ 0 \ 1], \ \mathbf{z}_2^T = [s_{12} \ -c_{12} \ 0], \ \mathbf{z}_2^T = [s_{12} \ -c_{12} \ 0], \ \mathbf{z}_3^T = [c_{12}c_3 \ s_{12}c_3 \ s_3]. \quad (\text{E13})$$

У овом нумеричком примеру узастопне позиције  $q_i(t_k)$ , брзине  $\dot{q}_i(t_k)$  и убрзања  $\ddot{q}_i(t_k)$  УПДПа су коришћена као улазни параметри. На основу ових података, као и геометријских и инерцијалних параметара УПДПа, моменти  $u_i$  су рачунати применом RNEA и предложеног mRNEA. Применом ова два алгоритма добијају се исти резултати, слика E2(a). На основу тога се закључује да решење система линеарних једначина (34) дају вредности  $\ddot{q}_i(t_k)$  које су идентична улазним убрзањима, слика E2(b).



Слика Е2. (а) Покретачки моменти у зглобовима  $u_i$  добијени RNEA и mRNEA процедуром. (б) Угаона убрзања чланова УПДПа.

## Захвалност

Описано техничко решење је реализовано у оквиру пројекта ТР 35023 под називом „Развој уређаја за тренинг пилота и динамичку симулацију лета модерних борбених авиона и то 3-осне центрифуге и 4-осног уређаја за просторну дезоријентацију пилота“, који је финансиран од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

## Референце:

1. P. Neto, N. Mendes, R. Araújo, J.N. Pires, A.P. Moreira, High-level robot programming based on CAD: dealing with unpredictable environments. *Industrial Robot: An International Journal* 39(2012) 294-303.
2. R. Featherstone, D. Orin, Dynamics, in: *Handbook of robotics*, B. Siciliano, O. Khatib (Eds.), Springer-Verlag London Limited, 2016, pp. 35–65.
3. R. Featherstone, D. Orin, Robot Dynamics, Equations and Algorithms, *IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)*, San Francisco, CA, 24–28 (2000) 826–834.

4. B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo, Dynamics, in: *Robotics: Modelling, Planning and Control*, Springer–Verlag London Limited, 2009, pp. 247–302.
5. M. Hirschorn, J. Kövecses, The role of the mass matrix in the analysis of mechanical systems, *Multibody Syst. Dyn.*, 30 (2013) 397–412.
6. M. Walker, D. Orin, Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms, *Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement & Control*: 104 (1982) 205–211.
7. M. Walker, D. Orin, Dynamics, in: *Robot motion: Planning and Control*, M. Brady, J. Hollerbach, T. Johnson, T. Lozano–Perez, M. Mason (Eds.), MIT Press, 1984, pp. 51–126.
8. M. Walker, Kinematics and Dynamics, in: *Handbook of industrial robotics*, S.Y. Nof (Eds.), John Wiley and Sons, Inc., 1985, pp. 80–95.
9. L. Tsai, Dynamics of Serial Manipulators, in: *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*, John Wiley and Sons, Inc, 1999, pp. 372–423.
10. R. Featherstone, *Rigid Body Dynamics Algorithms*, Springer, 2008.
11. J. Hollerbach, A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 10(11) (1980) 730–736.
12. J. Luh, M. Walker, R. Paul, On–Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators, *Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement & Control*: 102(2)(1980) 69–76.
13. R. Featherstone, *Robot Dynamics Algorithms*, Boston/Dordrecht/Lancaster: Kluwer Academic Publishers, 1987.
14. V. Kvrđić, J. Vidaković, J. Efficient method for robot forward dynamics computation, *Mechanism and Machine Theory*, 145(2020) 103680.
15. S. Shah, S. Saha, J. Dutt, Dynamics of Tree–Type Robotic Systems, *Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering* 62 (2013) DOI 10.1007/978–94–007–5006–7 1, Springer Science+Business Media Dordrecht.
16. S. Saha, Simulation of Industrial Manipulators Based on the  $UDU^T$  Decomposition of Inertia Matrix *Multibody Syst. Dyn.*, 9 (2003) 63–85.
17. A. Mohan, S. Saha, A recursive, numerically stable, and efficient algorithm for serial robots, *Multibody Syst. Dyn.* 17(4) (2007) 291–319.
18. <https://new.abb.com/products/robotics/robotstudio>
19. <https://www.fanucamerica.com/products/robots/robot-simulation-software-FANUC-ROBOGUIDE>
20. <http://gazebosim.org/>
21. <https://cyberbotics.com/>
22. <https://simtk.org/projects/simbody/>
23. <http://dartsim.github.io/>
24. R. Featherstone, The calculation of Robot Dynamics using Articulated–Body Inertias Position and velocity transformations between robot end effector coordinates and joint angles, *Int. J. Robotics Research*, 2(1) (1983) 13–30.
25. B. Armstrong–Helouvy, Friction in Machine, in: *Control of Machines with Friction*. Kluwer, Boston, MA, 1992, pp. 7–42.
26. S. Mitrović, Z. Dimić, J. Vidaković, M. Lutovac, V. Kvrđić, System for simulation and supervision of robotic cells. In *Proceedings of the 12th International Scientific Conference MMA* (2015) 51–54.
27. V. Kvrđić, Z. Visnjic, V. Cvijanovic, D. Divnic, S. Mitrovic, Dynamics and control of a spatial disorientation trainer. *Robotics and Comput. Integr. Manuf.*, 35 (2015) 104–125.

## Листа техничких решења аутора за период 2009. – 2020. година

### Владимир Квргић, листа техничких решења

#### *Нови производ или технологије (M81)*

1. В. Квргић, М. Бућан, Р. Радиша, М. Васић, В. Чарапић, И. Лазаревић, „Вертикални 5-осни стругарски обрадни центар“, 2010.

<https://www.li.rs/images/stories/tehnicka-resenja/2010/2010-TR-Vertikalni%205-osni%20strugarski%20obradni%20centar.pdf>

2. В. Квргић, М. Бућан, З. Димић, „Хоризонтална бушилица глодалица са Т креветом ХБГ 130 ОЦ“, 2010.

<https://www.li.rs/images/stories/tehnicka-resenja/2010/2010-TR-Horizontalna-busilica-glodalica-sa-T-krevetom-HBG-130-OC.pdf>

3. М. Главоњић, Д. Милутиновић, В. Квргић, З. Димић, С. Живановић, “Троосна вертикална глодалица са паралелном кинематиком (2012).

[http://cent.mas.bg.ac.rs/mpk/pdf/teh\\_res\\_pn101\\_v2.pdf](http://cent.mas.bg.ac.rs/mpk/pdf/teh_res_pn101_v2.pdf)

#### *Нова техничка решења примењена на националном нивоу (M82)*

4. М. Главоњић, Д. Милутиновић, В. Квргић, С. Живановић, З. Димић, Н. Славковић, „Мини лабораторијска и едукациона стона троосна глодалица са паралелном кинематиком“, Маш. факултет у Београду и Лола институт (2012).

[http://cent.mas.bg.ac.rs/mpk/pdf/tr\\_pn101st.pdf](http://cent.mas.bg.ac.rs/mpk/pdf/tr_pn101st.pdf)

5. З. Вишњић, Ж. Мурар, В. Квргић, Д. Дивнић, „Јединица за глодање, бушење и брушење на вертикалном стругу“, Лола институт (2013).

<https://www.li.rs/images/stories/tehnicka-resenja/2013/2013-TR-Jedinica-za-glodanje,-busenje-i-brusenje-na-vertikalnom-strugu.pdf>

6. Г. Ференц, З. Димић, В. Квргић, В. Цвијановић, „Систем за управљање индустријским роботима реализован применом савремених софтверских алата за рад у реалном времену“, Лола институт (2013).

<https://www.li.rs/images/stories/tehnicka-resenja/2013/2013-TR-Sistem-za-upravljanje-industrijskim-robotima-realizovan-primenom-savremenih-softverskih-alata-za-rad-u-realnom-vremenu.pdf>

7. В. Квргић, З. Димић, М. Милићевић, В. Цвијановић, Д. Илић, А. Павасовић, „Управљачка јединица отворене архитектуре за управљање машинама алаткама и роботима“, (2010).

<https://www.li.rs/images/stories/tehnicka-resenja/2010/2010-TR-Upravljacka-jedinica-otvorene-arhitekture-za-upravljanje-masinama-alatkama-i-robotima.pdf>

*Битно побољшан постојећи производ (M84)*

8. В. Квргић, Р. Милићевић, Ж. Мурар, М. Васић, П. Степанић, „Модернизација двостубног вертикалног струга коломна-ЗТС 1540“, (2009), <https://www.li.rs/images/stories/tehnicka-resenja/2010/2010-TR-Modernizacija-dvostubnog-vertikalnog-struga-Kolomna-ZTS-1540.pdf>

### **Јелена Видаковић, листа техничких решења**

*Битно побољшан постојећи производ (M84)*

1. Лутовац М., Видаковић Ј., Данчуо З., Степановић А.: "Унапређење система за програмирање, симулацију и удаљено праћење кретања манипулатора применом нових рачунарских технологија и алата", (2013), TP35023  
<https://www.li.rs/images/stories/tehnicka-resenja/2013/2013-TR-Unapredjenje-sistema-za-programiranje-simulaciju-i-udaljeno-pracenje-kretanja-manipulatora-primenom-novih-racunarskih-tehnologija-i-alata.pdf>

### **Прилог 1**

Рад у часопису категорије M21, Kvrđić, Vladimir, Vidaković, Јелена. "Efficient method for robot forward dynamics computation." Mechanism and Machine Theory 145 (2020): 103680, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.103680.



## Research paper

## Efficient method for robot forward dynamics computation

Vladimir Kvrđić<sup>a,\*</sup>, Jelena Vidaković<sup>b</sup><sup>a</sup> University of Belgrade, Institute Mihajlo Pupin (IMP), Volgina 15, 11060 Belgrade, Serbia<sup>b</sup> Lola institute, Kneza Viseslava 70a, 11030 Belgrade, Serbia

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 1 May 2019

Revised 16 July 2019

Accepted 15 October 2019

Available online 12 November 2019

## Keywords:

Forward dynamics

Inverse dynamics

Recursive Newton–Euler algorithm

Robotics

Simulation system

## ABSTRACT

Conventional methods for solving robot forward dynamics are characterized by high computational complexity. Recursive Newton-Euler algorithm (RNEA) is the most efficient computational method used for deriving a manipulator's dynamic equations of motion. In order to solve robot forward dynamics using RNEA in the most widely used Walker and Orin's method 1, it is necessary to execute RNEA  $n + 1$  times, where  $n$  is the number of degrees-of-freedom (DoF). Herein, a simple and efficient method to solve forward dynamics using the modified RNEA (mRNEA) only once is presented. The proposed method is significantly more beneficial when used for robot simulations as it does not require calculating joint torques as inputs for forward dynamics unlike other methods. Further, an algorithm that calculates the joints' accelerations based on forward dynamics while considering the actuators' force/torque saturations and achieves a realistic simulation of robot movements is presented. The proposed mRNEA, its application in the presented forward dynamics algorithm, and the efficiency of the presented algorithms are demonstrated using a serial 6-DoF robot as an example.

© 2019 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

## 1.1. Background

One of the goals of robot simulation is to verify the feasibility of programmed movements, and if necessary, to modify them. This is essential in robot design as the real values of forces and moments acting on robot links and joints must be calculated. Identifying the computational efficiency (number of computations) of the algorithms used within the simulation and the design of the robot and multibody systems is very important. The ease of development and implementation (algorithm development for a specific robot) of an algorithm is another highly pertinent feature; it is more important than computational complexity owing to the development of modern-day computers. Further, this is critical with regard to the development of highly complex robot dynamic models.

The past few decades saw a considerable amount of research on the computational efficiency of robot dynamic models within the design, control, and simulation of a variety of very complex and high-speed robots and multibody systems. The simulations used branched kinematic trees and dozens of DoF [1].

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [vladimir.kvrđić@pupin.rs](mailto:vladimir.kvrđić@pupin.rs) (V. Kvrđić), [jelena.vidaković@li.rs](mailto:jelena.vidaković@li.rs) (J. Vidaković).

## Nomenclature

$n$	number of degrees-of-freedom (DoF) of a robot
$\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}$	$n \times 1$ vectors of the joint accelerations, velocities, and positions
$\mathbf{H}(\mathbf{q})$	$n \times n$ generalized robot mass (inertia) matrix
$h_{ij}$	an element of matrix $\mathbf{H}(\mathbf{q})$
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	$n \times n$ matrix specifying centrifugal and Coriolis effects
$\mathbf{g}$	$3 \times 1$ vector of Earth's acceleration
$\mathbf{g}(\mathbf{q})$	$n \times 1$ vector of gravity terms
$\mathbf{J}(\mathbf{q})$	$6 \times n$ Jacobian matrix
$\mathbf{k}_e$	$6 \times 1$ vector of the external forces and moments on link $n$
$\mathbf{f}_e, \mathbf{n}_e$	$3 \times 1$ vectors of the external forces and moments on link $n$
$\mathbf{u}$	$n \times 1$ vector of input joint torques/forces
$\mathbf{u}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_e)$	$n \times 1$ bias vector
$\Delta t$	interpolation cycle time
$M_{\max i}, \dot{q}_{\max i}$	maximum torque and maximum speed for that torque, $i = 1$ to $n$
$u_i$	joint torques, $i = 1$ to $n$
$u_{ai}$	actuator torques, $i = 1$ to $n$
${}^j\mathbf{T}_i, {}^j\mathbf{D}_i, {}^j\mathbf{p}_i$	$4 \times 4$ homogenous transformation matrix, $3 \times 3$ orientation matrix, and $3 \times 1$ position vector from frame $j$ to frame $i$
$\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$	$3 \times 1$ vectors of angular velocity and angular acceleration of link $i$
$\mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i$	$3 \times 1$ vectors of linear velocities and linear accelerations of link $i$
$\dot{\mathbf{v}}_i^{\text{cm}}$	$3 \times 1$ vector of linear accelerations of link $i$ centre of mass
$\mathbf{r}_i^{\text{cm}}$	$3 \times 1$ vector of position of link centre of mass with respect to the coordinates of link $i$ expressed in the base coordinates
$\hat{\mathbf{r}}_i^{\text{cm}}$	$3 \times 1$ vector of position of link centre of mass with respect to the coordinates of link $i$ expressed in the coordinates of link $i$
$\mathbf{p}_i^*, \mathbf{l}_i$	$3 \times 1$ vectors of position of link $i$
$\mathbf{p}_e, \hat{\mathbf{p}}_e$	$3 \times 1$ vector of the position of the external force with respect to the coordinates of link $n$ expressed in the robot base coordinates and in the coordinates of link $n$ , respectively
$m_i$	mass of link $i$
$\mathbf{I}_i^{\text{cm}}$	moment of inertia matrix of link about the centre of mass of link $i$ expressed in the base link coordinates
$\hat{\mathbf{I}}_i^{\text{cm}}$	moment of inertia matrix of link about the centre of mass of link $i$ expressed in coordinates of link $i$
$\mathbf{F}_i, \mathbf{N}_i$	total force and total moment exerted on link $i$
$\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i$	force vector and moment vector exerted on link $i$ by link $i - 1$ with respect to the base coordinate frame, $i = 1$ to $n$
$\mathbf{n}_{ic}, \mathbf{n}_{ia1}, \mathbf{n}_{ia2}, \mathbf{n}_{ia3}$	$3 \times 1$ vectors which are the parts of the moments $\mathbf{n}_i$
$\mathbf{n}'_{ic}$	$3 \times 1$ vectors which are the parts of the moments $\mathbf{n}_i$
$\mathbf{n}'_{ia1}, \mathbf{n}'_{ia2}, \mathbf{n}'_{ia3}$	$3 \times n$ vectors which are the parts of the moments $\mathbf{n}_i$ , and which correlate with accelerations
$\mathbf{b}_{ik}, \mathbf{b}_{ikj}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{ik}, \mathbf{e}_n$	$3 \times 1$ vectors of the total force $\mathbf{F}_i$
$\mathbf{d}_{ik}, \mathbf{d}_{ikj}$	$3 \times 1$ vectors of the total moment $\mathbf{N}_i$
$\mathbf{E}_{ik}$	$3 \times 1$ vectors of the moment $\mathbf{n}_i$
$\mathbf{z}_{i-1}$	$3 \times 1$ unit vector of the axis of motion
$\mathbf{H}_a(\mathbf{q})$	$n \times n$ generalized robot mass matrix that relates to the actuator rotors
$\mathbf{u}'_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_{ea})$	$n \times 1$ bias vector that relates to the actuator rotors
$\mathbf{F}_v$	$n \times n$ diagonal matrix of viscous friction coefficients $f_{vi}$
$\mathbf{F}_s$	$n \times n$ diagonal matrix of Coulomb friction constants $\mu_{si}$
$\text{sign}(x)$	sign of $x$
$k_i$	gear ratio of the gearbox of axis $i$
$I_{ai}$	moment of inertia of the rotor and the gearbox elements of the axis $i$ reduced to that rotor

Two main problems related to the robot dynamics are forward and inverse dynamics problems. Forward dynamics (FD) solves the motion from the forces, while inverse dynamics (ID) solves the forces from the motion [2]. ID is used in dynamic model-based control and for FD calculations. FD is used mainly in simulation purposes.

## 1.2. Formulation of the problem of interest for this investigation

One of the present challenges in robot simulation is to derive algorithms that are not only computationally efficient, but also are easy to apply to a specific robot as well.

A Lagrange formulation (LF) of manipulator equations of motion provides a compact analytical form containing a symmetric, non-singular  $n \times n$  generalized robot mass (inertia) matrix  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ , and a bias vector  $\mathbf{u}'$  that denotes joint torque contributions that do not correlate with the joint accelerations [1,3–10]. Therefore, when the LF is used, the joint accelerations  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$  (within one interpolation cycle) can be computed by solving the system of  $n$  linear equations, where  $n$  is number of manipulator DoF. Although it is not complex to solve FD using LF, this method is typically used for manipulators when  $n \leq 3$  because of the very high computational complexity of the LF:  $O(n^4)$ .

Robot dynamic models should have a clear relationship with a recursive set from which the optimum computational efficiency is obtained [3]. In contrast to the LF, the computational complexity of the RNEA is  $O(n)$ . Reference [11] developed a recursive LF; however, the computational complexity of the recursive LF is  $O(n^3)$ .

Luh, Walker, and Paul [12] developed a computationally efficient RNEA which is independent of the type of robot configuration. This method involves successive transformations of the velocities and accelerations from the base of the manipulator out to the end effector, link-by-link, using the relationships of moving coordinate systems. Forces and moments are then computed recursively from the end effector to the base in order to obtain the joint torques/forces (ID). The RNEA can also be found in many classical robotics texts [9,13–16].

Walker and Orin [6,7] employed the RNEA for computing the FD and presented four methods to solve the joint accelerations. Their method 1 (WO method 1) remains the simplest and the most recommended in the literature [3,4]. According to this method, torque  $\mathbf{u}'$  is computed using the RNEA. Further, each column  $\mathbf{h}_i$ ,  $i = 1$  to  $n$ , of matrix  $\mathbf{H}$  is computed as the torque vector given by the RNEA. It is shown that WO method 3—later named the Composite-Rigid-Body Algorithm (CRBA) [1,10,17]—is the most efficient of all WO methods. Unfortunately, CRBA is difficult to develop and implement.

In this paper, a modified recursive Newton-Euler method for derivation of dynamic model of robot manipulator is proposed. Besides being efficient and easy to use, mRNEA gives explicitly the mass matrix  $\mathbf{H}$  and the bias vector  $\mathbf{u}'$ .

## 1.3. Literature survey

For the computation of the mass matrix, [18] developed an Articulated Body Algorithm (ABA) for the FD calculation. The algorithm is based on recursive formulas involving quantities called articulated-body inertias, which represent the inertial properties of the collections of rigid bodies. Reference [19] described an algorithm that reduces the time complexity for the construction of matrix  $\mathbf{H}$  and inverts it to the theoretical minimum using the RNEA and ABA. The calculation of the terms of the generalized matrix  $\mathbf{H}$  by means of the Hessian of the Gibbs function with respect to generalized accelerations and a recursive algorithm is presented in [20]. In [21] and [22], it is shown that conventional methods which employ the matrix  $\mathbf{H}$  [6] can be significantly accelerated by applying suitable factorization.

A parallel algorithm, based on the composed rigid-body method, that generates the matrix  $\mathbf{H}$  using the parallel Newton-Euler (NE) algorithm, the parallel linear recurrence algorithm, and the modified row-sweep algorithm is described in [23].

Reference [24] presented a parallel computer algorithm for the simulation of large articulated robotic systems. The method employs the Divide and Conquer Algorithm (DCA) multibody methodology and achieves significant increases in speed by using a variation of the ABA to efficiently construct the DCA subsystems.

A methodology for the dynamic modelling of hybrid robots that are constructed by serially connected non-redundant parallel modules is presented [25]. The proposed methods give the inverse dynamics model using RNEA, whereas the forward dynamics model generalizes the serial robot algorithm of Featherstone [18].

An analytical derivation of the matrix  $\mathbf{H}$  and its inverse for an open-loop, serial-chain robot is presented in [26–28]. A decomposition of a generalized matrix  $\mathbf{H}$  based on Decoupled Natural Orthogonal Complement (DeNOC) matrices is used in these papers, which resulted in efficient  $O(n)$  recursive FD algorithms that calculate the joint accelerations which are then integrated numerically to perform a simulation [29,30] (Table 2). In [31] and [32], the DeNOC-based formulation is extended to dynamic modelling and the analysis of more complex tree-type robotic systems consisting of multiple-DoF joints.

In [32], a more efficient  $O(n)$  recursive FD algorithm based on DeNOC is presented. However, the mechanism—with which the researchers almost halved the number of counts with regard to algorithms presented in papers [29] and [30]—was not discussed. These algorithms are also based on DeNOC considering that they applied this algorithm to a robot that was not a tree type and had only six 1-DOF joints. In [33], a dynamic modelling methodology is presented for parallel multibody mechanical systems based on the RNEA and the DeNOC matrices. This methodology facilitates both ID and FD.

In [34], by using a virtual spring approach, a modified DeNOC method is introduced for forward dynamic analysis of parallel robots.

A general and effective method to solve the forward and inverse dynamics of mechanical systems subjected to non-holonomic constraints is proposed in [35]. In [36] was examined the modular development of two alternate methods for distributed computation of the forward dynamics simulations of constrained mechanical systems. Reference [37] proposed a reduced-order FD of multi-closed-loop systems by exploiting the associated inherent kinematic constraints at the acceleration level.

Reference [38] presented the decomposition of the generalized matrix  $\mathbf{H}$  of multibody systems with an open kinematic architecture (serial or tree type) with its application in FD and for simulation purposes.

References [39,40] presented an algorithm which calculates FD for a 3-DoF centrifuge motion simulator and a 4-DoF spatial disorientation trainer using the RNEA only once.

In [41], a numerical algorithm for iterative solution of systems of nonlinear ordinary differential equations for solving forward dynamics problems of manipulators is presented.

Reference [42] considered fuzzy uncertainty in forward dynamics simulations.

The identification of the robot dynamic parameters was investigated in many robotics texts [43–46].

#### 1.4. Scope and contribution of this study

The aim of this study is to discretize the FD computation and to further reduce the complexity of FD in open-chain manipulators. The contributions of this manuscript are as follows:

- (1) A method to simplify the development and implementation of FD algorithms, which executes the mRNEA only once, is proposed. The terms of the matrix  $\mathbf{H}$  and the vector  $\mathbf{u}$  are obtained explicitly by using mRNEA in a similar manner as LF.
- (2) An implementation of a new FD algorithm within a simulation system is presented. In the most recommended methods presented in the literature, the additional calculation of the input joint torques  $\mathbf{u}$ , Eq. (2), had to be performed within this simulation system of a robot. With the presented method, input-joint-torque calculation is performed within the FD algorithm, and therefore, the computational complexity of the simulation system is additionally reduced. As a result, the simulation system has to solve ID only once within each interpolation cycle, in comparison to simulation systems which use, for example, WO method 1, and which solve ID  $n + 2$  times.
- (3) The robot motion equations are discretized in order to be suitable for implementation within discrete simulation systems and robot controllers. This enables the calculations of joint velocities and positions, after the calculation of joint accelerations, in a simple way (Point 7 in Algorithm 1).
- (4) The development of the proposed mRNEA and its application in the FD algorithm is systematically illustrated for the cases of serial-chain robots with six and four rotational DoF.
- (5) The presented FD algorithm is computationally one of the most efficient when compared with other methods given in the literature. While the computational complexity of all WO methods, including CRBA, is  $O(n^2)$  [4], the presented algorithm is of  $O(n)$  complexity.
- (6) Compared with other efficient methods, the presented algorithm is very simple to develop and implement for a general open-chain robot.
- (7) Finally, an algorithm is presented herein which examines the joint acceleration capabilities in each interpolation cycle considering the actuator torque/force saturations and provides realistic values of the accelerations along with the velocities, positions, forces, and moments of the robot links during programmed movements (Algorithm 1).

#### 1.5. Organization of the paper

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, mathematical background for the research interest of the paper is given. Section 3 presents the proposed approach for efficient FD calculation and its implementation in a robot simulation system. Section 4 depicts the proposed FD algorithm for open-chain manipulators with  $n$  DoF. The application of FD, based on mRNEA on an open-chain 6-DoF system, is given systematically in Section 5. A toy model for the 4-DoF spatial disorientation trainer (SDT) is also presented in this Section. The computational efficiency of the proposed FD algorithm is analysed in Section 6. The FD algorithm, which calculates the achievable motor velocities in each interpolation cycle based on the actuator torque/force saturations, is presented in Section 7. The validity of the proposed algorithm is examined within the simulation system of a 6-DoF serial-chain robot in Section 8. Finally, concluding remarks are given in Section 9.

## 2. Mathematical background

Given that the motion control and simulation of robots and general multibody systems is performed using discrete controllers (digital computers), the motion equations of such continuous systems need to be discretized to be suitable for numerical calculations and implementation within discrete simulation systems and controllers.

Forward dynamics (FD) calculates the joint accelerations  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$  at a time instant  $t_k$  and the joint velocities  $\dot{\mathbf{q}}(t_{k+1})$  of the next interpolation cycle time ( $\Delta t$ ) and joint positions  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  at the end of the next  $\Delta t$ . FD considers the joint torques  $\mathbf{u}(t_k)$ ; the inertial, gravitational, and Coriolis forces of the robot links; forces and moments acting on the end effector; and the friction forces and moments of the joints. The joint velocities and positions of the next  $\Delta t$  are then calculated in a very simple manner (Point 7 in Algorithm 1).

When a robot is considered a continuous nonlinear system, after obtaining  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$ , the velocity  $\dot{\mathbf{q}}(t_{k+1})$  and position  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  at a time instant  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$  are computed using a numerical integration method, i.e., Runge-Kutta, with an integration step  $\Delta t$  [4].

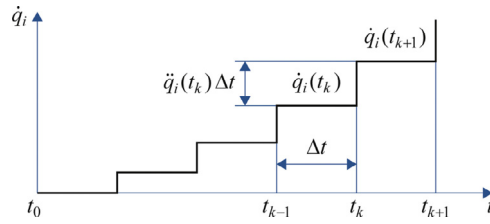


Fig. 1. Example of given joint velocity change.

On the other hand, inverse dynamics (ID) determines the joint torques  $\mathbf{u}(t_k)$  at time instant  $t_k$  which are required to generate the motion specified by the joint accelerations, and consequently, the velocities and positions. This is accomplished by using the current velocities, current positions, the forces and moments acting on the end effector, and the friction forces and moments of the joints.

The ID of a manipulator with  $n$  DoF can be solved by well-known equations of motion which represent its joint space dynamic model

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{k}_e = \mathbf{u}, \tag{1}$$

where  $\ddot{\mathbf{q}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ , and  $\mathbf{q}$  are  $n \times 1$  vectors of the joint accelerations, velocities, and positions, respectively;  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  is an  $n \times n$  matrix specifying the centrifugal and Coriolis effects;  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  is an  $n \times 1$  vector of gravity terms;  $\mathbf{k}_e$  is a  $6 \times 1$  vector of the external forces and moments on link  $n$ ;  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  is a  $6 \times n$  Jacobian matrix; and  $\mathbf{u}$  is an  $n \times 1$  vector of the input joint torques/forces. The diagonal terms of the mass matrix are related to the inertias of the corresponding DoF, and the off-diagonal terms express the inertial couplings between the DoF [5].

From Eq. (1), it can be seen that for time instant  $t_k$ , the joint torques/forces are linear functions of the joint accelerations  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$  when  $\mathbf{q}(t_k)$  and  $\dot{\mathbf{q}}(t_k)$  are given. These equations can be obtained explicitly with the LF which contains the matrix  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  and vectors  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ , and  $\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{k}_e$ . Consequently, the joint accelerations  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$  can be computed by solving the following system of  $n$  linear equations

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_e), \tag{2}$$

$$\mathbf{u}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_e) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{k}_e. \tag{3}$$

### 3. Proposed approaches

Regardless of the type of robotic movements—continuous (controlled) path movement (CP) or point-to-point movement (PTP)—or of the manner in which these movements are given—programmed, hand-guided, vision-guided, or computer-aided design (CAD)-guided—a path planner of the robot controller transforms the motion commands into a series of successive positions of robot joints/actuators. As they are sent to the servo controller at constant time intervals  $\Delta t$ , they correspond to the desired joint/actuator velocities of  $\dot{q}_i(t_k) = (q_i(t_{k+1}) - q_i(t_k))/\Delta t$ , which can be considered constant within each  $\Delta t$  (up-to-date controllers have  $\Delta t$  between 0.01 s and 0.003 s). Thereafter, the path planner sends the desired joint velocities to the speed controllers of the actuators, whose task is to keep them constant within each  $\Delta t$ .

Since each joint velocity can be considered constant within each  $\Delta t$ , and since the current velocity  $\dot{q}_i(t_k)$  and given acceleration  $\ddot{q}_i(t_k)$  are known (calculated within the path planner), the joint velocity in the next interpolation cycle is  $\dot{q}_i(t_{k+1}) = \dot{q}_i(t_k) + \ddot{q}_i(t_k) \Delta t$ , which is depicted in Fig. 1.

As mentioned above, in a classical robot simulation system, FD first calculates the bias torque  $\mathbf{u}'$  by solving ID, which utilizes the RNEA. Thereafter, FD builds the matrix  $\mathbf{H}$ , usually solving ID with the RNEA  $n$  times (WO method 1). In the next step, the simulation system determines the torque  $\mathbf{u}$ , which is the input into FD, solving ID in such a way that the robot joints achieve their given positions  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  at the end of the next interpolation cycle (see Fig. 1). These positions are calculated in the path interpolator. Finally, FD solves the system of  $n$  linear Eq. (2) in order to calculate  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$ . The foregoing discussion implies that by using the complexity of the most used approach, the robot simulation system has to solve ID in every interpolation cycle  $n + 2$  times.

In this study, a method for obtaining Eq. (2) explicitly with the mRNEA is proposed. Consequently, a simple and effective method, which calculates  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$  using the mRNEA only once, is proposed. The presented FD algorithm utilizes the current values of  $\mathbf{q}(t_k)$  and  $\dot{\mathbf{q}}(t_k)$ , the given values of  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  and  $\dot{\mathbf{q}}(t_{k+1})$  calculated in the path interpolator, and  $\mathbf{k}_e$ . First, it checks if the desired positions and velocities are feasible. If they are not, it limits their values in accordance with their maximum/minimum possible values.

Based on this, the algorithm calculates the desired joint accelerations  $\ddot{q}_i(t_k) = (\dot{q}_i(t_{k+1}) - \dot{q}_i(t_k))/\Delta t$ . Next, the mRNEA calculates the joint torques/forces  $\mathbf{u}$  required for the desired joint motions. In the next step, the algorithm calculates the required actuator torques  $\mathbf{u}_a$ , whose capabilities are examined. Unachievable torques/forces are replaced with the maximum/minimum possible, with the aim that the FD algorithm determines the achievable accelerations. Other joint accelerations keep their values obtained from the path interpolator.

**Algorithm 1**

Achievable joint velocities calculation.

---

**Input:** The current values of  $q_i(t_k)$ ,  $\dot{q}_i(t_k)$ , the given values of  $q_i(t_{k+1})$ ,  $\dot{q}_i(t_{k+1})$ ,  $i = 1$  to  $n$ , for the next  $\Delta t$  calculated in the path planner, robot configuration, link masses, mass center positions and inertias of the links in the robot base frame, external forces, joint-friction coefficients, gear ratios, geometric coupling effects, and actuator capabilities.

- 1: if  $\dot{q}_i(t_{k+1}) > \dot{q}_{\max i}(t_{k+1})$ , then  $\dot{q}_i(t_{k+1}) = \dot{q}_{\max i}(t_{k+1})$ , or  
if  $\dot{q}_i(t_{k+1}) < -\dot{q}_{\max i}(t_{k+1})$ , then  $\dot{q}_i(t_{k+1}) = -\dot{q}_{\max i}(t_{k+1})$
- 2:  $\ddot{q}_i(t_k) = (\dot{q}_i(t_{k+1}) - \dot{q}_i(t_k)) / \Delta t$
- 3:  $u_i$  calculation (ID, Eqs. (34))
- 4:  $u_{ai}$  calculation (Appendix D)
- 5: if  $u_{ai} > M_{\max i}$ , then  $u_{ai} = M_{\max i}$  and  $i_{ui} = 1$ , or  
if  $u_{ai} < -M_{\max i}$ , then  $u_{ai} = -M_{\max i}$  and  $i_{ui} = 1$
- 6:  $\ddot{q}_i(t_k)$  calculation (Eqs. (92)),  
if  $i_{ui} = 1$ , then  $\ddot{q}_i(t_k)$  takes a new achievable value
- 7:  $\dot{q}_i(t_{k+1}) = \dot{q}_i(t_k) + \ddot{q}_i(t_k)\Delta t$  and  $q_i(t_{k+1}) = q_i(t_k) + \dot{q}_i(t_{k+1})\Delta t$
- 8: **return**  $\dot{q}_i(t_{k+1})$ ,  $q_i(t_{k+1})$

---

In this way, within the simulation system, only attainable motor velocities and positions are sent from the path planner to the speed controller during each  $\Delta t$ . Consequently, joint forces and moments are calculated based on the attainable velocities and accelerations, so that their realistic values are obtained. The FD simulation can be used in a stage of the robot design process, in which case it enables the proper design of bearings and links. This algorithm (Algorithm 1) is presented as follows:

**4. Proposed FD algorithm based on mRNEA**

In this section, the proposed FD algorithm based on mRNEA for open-chain manipulators with  $n$  DoF is presented.

A  $4 \times 4$  homogenous transformation matrix (HTM) that transforms point coordinates from frame  $j$  to frame  $i$  is denoted by  ${}^jT_i$ , and from the base frame to frame  $i$  by  $T_i$ . The matrix  ${}^jT_i$  contains a  $3 \times 3$  orientation matrix  ${}^jD_i = [{}^jx_i \quad {}^jy_i \quad {}^jz_i]$  and a  $3 \times 1$  position vector  ${}^j\mathbf{p}_i$ .

The linear acceleration of the robot link  $i$  centre of mass is

$$\dot{\mathbf{v}}_i^{\text{cm}} = [\dot{v}_{xi}^{\text{cm}} \quad \dot{v}_{yi}^{\text{cm}} \quad \dot{v}_{zi}^{\text{cm}}]^T = \dot{\mathbf{v}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_i^{\text{cm}} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i^{\text{cm}}), \quad (4)$$

where  $\mathbf{r}_i^{\text{cm}} = [r_{xi}^{\text{cm}} \quad r_{yi}^{\text{cm}} \quad r_{zi}^{\text{cm}}]^T = [r_{xi} \quad r_{yi} \quad r_{zi}]^T = \mathbf{D}_i \hat{\mathbf{r}}_i^{\text{cm}}$  is the position of the link  $i$  centre of mass with respect to the coordinates of link  $i$  expressed in the base coordinates. This vector in the coordinates of link  $i$  is  $\hat{\mathbf{r}}_i^{\text{cm}} = [\hat{r}_{xi} \quad \hat{r}_{yi} \quad \hat{r}_{zi}]^T$ . A vector cross product is denoted with  $\times$ , and  $\boldsymbol{\omega}_i$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ , and  $\dot{\mathbf{v}}_i$  are given in Appendix B. Eq. (4) can be rewritten as

$$\dot{\mathbf{v}}_i^{\text{cm}} = \sum_{k=1}^i \mathbf{b}_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \mathbf{b}_{ikj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad i = 1 \text{ to } n, \quad (5)$$

where  $\mathbf{b}_{ik}$  and  $\mathbf{b}_{ikj}$  are  $3 \times 1$  vectors. The total force  $\mathbf{F}_i$  and total moment  $\mathbf{N}_i$  exerted on link  $i$ , obtained from the NE equations, are

$$\mathbf{F}_i = [F_{xi} \quad F_{yi} \quad F_{zi}]^T = m_i [\dot{v}_{xi}^{\text{cm}} \quad \dot{v}_{yi}^{\text{cm}} \quad \dot{v}_{zi}^{\text{cm}} - g]^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{N}_i = [N_{xi} \quad N_{yi} \quad N_{zi}]^T = \mathbf{I}_i^{\text{cm}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i^{\text{cm}} \boldsymbol{\omega}_i). \quad (7)$$

The mass of link  $i$  is denoted as  $m_i$ ,  $g$  is Earth's acceleration and  $\mathbf{I}_i^{\text{cm}}$  is the  $3 \times 3$  moment of the inertia matrix of link  $i$  about the centre of mass of that link expressed in the base coordinates. Eqs. (5) and (6) yield

$$\mathbf{F}_i = m_i \left( [0 \quad 0 \quad -g]^T + \sum_{k=1}^i \mathbf{b}_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \mathbf{b}_{ikj} \dot{q}_k \dot{q}_j \right), \quad i = 1 \text{ to } n. \quad (8)$$

Eq. (7) can be rewritten as

$$\mathbf{N}_i = \sum_{k=1}^i \mathbf{d}_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \mathbf{d}_{ikj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad i = 1 \text{ to } n, \quad (9)$$

where  $\mathbf{d}_{ik}$  and  $\mathbf{d}_{ikj}$  are  $3 \times 1$  vectors. The effects of the external forces and moments,  $\mathbf{k}_e^T = [\mathbf{f}_e \quad \mathbf{n}_e]^T$ , acting on the end effector are well-known as

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{f}_e, \quad (10)$$

$$\mathbf{n}_n = \mathbf{N}_n + \mathbf{n}_e + [p_{ey}f_{ez} - p_{ez}f_{ey} \quad p_{ez}f_{ex} - p_{ex}f_{ez} \quad p_{ex}f_{ey} - p_{ey}f_{ex}]^T, \quad (11)$$

where  $\mathbf{p}_e = [p_{ex} \ p_{ey} \ p_{ez}]^T = \mathbf{D}_n \hat{\mathbf{p}}_e$  is the position of the external force with respect to the coordinates of link  $n$  expressed in the base coordinates. This vector in the coordinates of link  $n$  is  $\hat{\mathbf{p}}_e = [\hat{p}_{ex} \ \hat{p}_{ey} \ \hat{p}_{ez}]^T$ . Eqs. (8) and (10) yield

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{e}_i + \sum_{k=1}^i \mathbf{e}_{ik} \ddot{q}_k, \tag{12}$$

$$\mathbf{e}_i = m_i \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix}^T + \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \mathbf{b}_{ikj} \dot{q}_k \dot{q}_j \right), \quad i = 1 \text{ to } n-1, \tag{13}$$

$$\mathbf{e}_n = m_n \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix}^T + \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \mathbf{b}_{ikj} \dot{q}_k \dot{q}_j \right) + \mathbf{f}_e, \quad i = n, \tag{14}$$

$$\mathbf{e}_{ik} = m_i \mathbf{b}_{ik}, \quad i = 1 \text{ to } n. \tag{15}$$

Similarly, Eq. (9) can be replaced with

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{d}_i + \sum_{k=1}^i \mathbf{d}_{ik} \ddot{q}_k, \tag{16}$$

$$\mathbf{d}_i = \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \mathbf{d}_{ikj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad i = 1 \text{ to } n. \tag{17}$$

From robot dynamics, the force  $\mathbf{f}_i$  and moment  $\mathbf{n}_i$  exerted on link  $i$  by link  $i - 1$  in the base coordinate frame, is well-known to be

$$\mathbf{f}_i = [f_{xi} \ f_{yi} \ f_{zi}]^T = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{i+1}, \tag{18}$$

$$\mathbf{n}_i = [n_{xi} \ n_{yi} \ n_{zi}]^T = \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{N}_i + \mathbf{l}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{f}_{i+1}, \tag{19}$$

where  $\mathbf{l}_i = [l_{xi} \ l_{yi} \ l_{zi}]^T = \mathbf{p}_i^* + \mathbf{r}_i^{\text{cm}}$ ,  $\mathbf{p}_{i+1}^* = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i$ .

The mass of the end effector can be included in the mass of link  $n$ . In accordance with Eqs. (10)–(19),  $\mathbf{f}_i$  and  $\mathbf{n}_i$  can be calculated as

$$\mathbf{f}_i = \sum_{k=i}^n \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^i \sum_{j=i}^n \mathbf{e}_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=k}^n \mathbf{e}_{jk} \ddot{q}_k, \quad i = n \text{ to } 1, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i &= \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{d}_i + \sum_{k=1}^i \mathbf{d}_{ik} \ddot{q}_k + \mathbf{l}_i \times \left( \mathbf{e}_i + \sum_{k=1}^i \mathbf{e}_{ik} \ddot{q}_k \right) + \mathbf{p}_i^* \times \left( \sum_{k=i+1}^n \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^{i+1} \sum_{j=i+1}^n \mathbf{e}_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=i+2}^n \sum_{j=k}^n \mathbf{e}_{jk} \ddot{q}_k \right) \\ &= \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{n}_{ic} + \mathbf{n}_{ia1} + \mathbf{n}_{ia2} + \mathbf{n}_{ia3}, \quad i = n \text{ to } 1, \end{aligned} \tag{21}$$

where  $\mathbf{n}_{ic}$ ,  $\mathbf{n}_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}_{ia2}$ , and  $\mathbf{n}_{ia3}$  are  $3 \times 1$  vectors, as follows:

$$\mathbf{n}_{nc} = \mathbf{d}_n + \mathbf{l}_n \times \mathbf{e}_n + \mathbf{p}_{n+1}^* \times \mathbf{f}_{n+1} = \begin{bmatrix} d_{xn} + l_{yn} e_{zn} - l_{zn} e_{yn} + p_{y(n+1)} f_{z(n+1)} - p_{z(n+1)} f_{y(n+1)} \\ d_{yn} + l_{zn} e_{xn} - l_{xn} e_{zn} + p_{z(n+1)} f_{x(n+1)} - p_{x(n+1)} f_{z(n+1)} \\ d_{zn} + l_{xn} e_{yn} - l_{yn} e_{xn} + p_{x(n+1)} f_{y(n+1)} - p_{y(n+1)} f_{x(n+1)} \end{bmatrix}, \quad i = n, \tag{22}$$

$$\mathbf{n}_{ic} = \mathbf{d}_i + \mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_i + \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{i+1} = \begin{bmatrix} d_{xi} + l_{yi} e_{zi} - l_{zi} e_{yi} + p_{yi}^* E_{z(i+1)} - p_{zi}^* E_{y(i+1)} \\ d_{yi} + l_{zi} e_{xi} - l_{xi} e_{zi} + p_{zi}^* E_{x(i+1)} - p_{xi}^* E_{z(i+1)} \\ d_{zi} + l_{xi} e_{yi} - l_{yi} e_{xi} + p_{xi}^* E_{y(i+1)} - p_{yi}^* E_{x(i+1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{i+1} = \sum_{k=i+1}^n \mathbf{e}_k, \quad i = n-1 \text{ to } 1, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{ia1} &= \sum_{k=1}^i (\mathbf{d}_{ik} + \mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_{ik}) \ddot{q}_k = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^i (d_{xik} + l_{yi} e_{zik} - l_{zi} e_{yik}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=1}^i (d_{yik} + l_{zi} e_{xik} - l_{xi} e_{zik}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=1}^i (d_{zik} + l_{xi} e_{yik} - l_{yi} e_{xik}) \ddot{q}_k \end{bmatrix} = [\mathbf{n}_{i1a1} \ \mathbf{n}_{i2a1} \ \dots \ \mathbf{n}_{iia1}] \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix}, \quad i = n \text{ to } 1, \\ [\mathbf{n}_{i1a1} \ \mathbf{n}_{i2a1} \ \dots \ \mathbf{n}_{iia1}] &= [\mathbf{d}_{i1} + \mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_{i1} \ \mathbf{d}_{i2} + \mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_{i2} \ \dots \ \mathbf{d}_{ii} + \mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_{ii}], \end{aligned} \tag{24}$$

$$\mathbf{n}_{ia2} = \mathbf{p}_i^* \times \sum_{k=1}^{i+1} \mathbf{E}_{(i+1)k} \ddot{\mathbf{q}}_k = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{i+1} (p_{yi}^* E_{z(i+1)k} - p_{zi}^* E_{y(i+1)k}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=1}^{i+1} (p_{zi}^* E_{x(i+1)k} - p_{xi}^* E_{z(i+1)k}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=1}^{i+1} (p_{xi}^* E_{y(i+1)k} - p_{yi}^* E_{x(i+1)k}) \ddot{q}_k \end{bmatrix} = [\mathbf{n}_{i1a2} \quad \mathbf{n}_{i2a2} \quad \dots \quad \mathbf{n}_{i(i+1)a2}] \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_{i+1} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{n}_{i1a2} \quad \mathbf{n}_{i2a2} \quad \dots \quad \mathbf{n}_{i(i+1)a2}] = [\mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{(i+1)1} \quad \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{(i+1)2} \quad \dots \quad \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{(i+1)(i+1)}],$$

$$\mathbf{E}_{(i+1)k} = \sum_{j=i+1}^n \mathbf{e}_{jki} \quad i = n-1 \text{ to } 1, \quad (25)$$

$$\mathbf{n}_{ia3} = \mathbf{p}_i^* \times \sum_{k=i+2}^n \mathbf{E}_{kk} \ddot{\mathbf{q}}_k = \begin{bmatrix} \sum_{k=i+2}^n (p_{yi}^* E_{zkk} - p_{zi}^* E_{ykk}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=i+2}^n (p_{zi}^* E_{xkk} - p_{xi}^* E_{zkk}) \ddot{q}_k \\ \sum_{k=i+2}^n (p_{xi}^* E_{ykk} - p_{yi}^* E_{xkk}) \ddot{q}_k \end{bmatrix} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{n}_{i(i+2)a3} \quad \dots \quad \mathbf{n}_{ina3}] \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_{i+2} \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{n}_{i(i+2)a3} \quad \dots \quad \mathbf{n}_{ina3}] = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{(i+2)(i+2)} \quad \dots \quad \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{nn}]$$

$$\mathbf{E}_{kk} = \sum_{j=k}^n \mathbf{e}_{jkk}, \quad i = n-2 \text{ to } 1, \quad \mathbf{n}_{na3} = \mathbf{n}_{(n-1)a3} = \mathbf{0} \quad (26)$$

In order to reduce the number of counts, the vector  $\mathbf{n}_{i+1}$  can be included in the vectors  $\mathbf{n}_{ic}$ ,  $\mathbf{n}_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}_{ia2}$ , and  $\mathbf{n}_{ia3}$ . In this way, Eq. (21) is transformed into

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}'_{ic} + (\mathbf{n}'_{ia1} + \mathbf{n}'_{ia2} + \mathbf{n}'_{ia3}) \ddot{\mathbf{q}}, \quad i = n \text{ to } 1, \quad (27)$$

where  $\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \dots \quad \ddot{q}_n]^T$  is an  $n \times 1$  vector,  $\mathbf{n}'_{ic}$  is a  $3 \times 1$  vector, and  $\mathbf{n}'_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia2}$ , and  $\mathbf{n}'_{ia3}$  are  $3 \times n$  vectors. They are given in the following equations:

$$\mathbf{n}'_{ic} = \mathbf{n}_{(i+1)c} + \mathbf{n}_{ic}, \quad (28)$$

$$\mathbf{n}'_{ia1} = [\mathbf{n}'_{i1a1} \quad \mathbf{n}'_{i2a1} \quad \dots \quad \mathbf{n}'_{ina1}] = \left[ \sum_{k=i}^n (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) \quad \sum_{k=i}^n (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \quad \dots \quad \mathbf{d}_{nn} + \mathbf{l}_n \times \mathbf{e}_{nn} \right], \quad (29)$$

$$\mathbf{n}'_{ia2} = \begin{bmatrix} \sum_{k=i}^{n-1} \mathbf{n}_{k1a2} & \sum_{k=i}^{n-1} \mathbf{n}_{k2a2} & \sum_{k=i}^{n-1} \mathbf{n}_{k3a2} & \sum_{k=i}^{n-1} \mathbf{n}_{k4a2} & \dots & \mathbf{n}_{(n-1)(n-1)a2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=i}^{n-1} (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)1}) & \sum_{k=i}^{n-1} (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)2}) & \sum_{k=i}^{n-1} (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)3}) & \sum_{k=i}^{n-1} (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)4}) & \dots & \mathbf{n}_{(n-1)(n-1)a2} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\mathbf{n}'_{ia3} = \left[ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{33} \quad (\mathbf{p}_i^* + \mathbf{p}_2^*) \times \mathbf{E}_{44} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{n-3} \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{E}_{(n-1)(n-1)} \quad \sum_{i=1}^{n-2} \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{e}_{nn} \right]. \quad (31)$$

The forces and moments exerted on link  $i$  by link  $i-1$  in the coordinates of link  $i-1$  are

$$\hat{\mathbf{f}}_i = [\hat{f}_{xi} \quad \hat{f}_{yi} \quad \hat{f}_{zi}]^T = \mathbf{D}_{i-1}^T \mathbf{f}_i \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{n}}_i = [\hat{n}_{xi} \quad \hat{n}_{yi} \quad \hat{n}_{zi}]^T = \mathbf{D}_{i-1}^T \mathbf{n}_i. \quad (32)$$

The projection of  $\mathbf{n}_i$  along the axis of motion of joint  $i$  is

$$u_i = \mathbf{z}_{i-1}^T \mathbf{n}_i, \quad (33)$$

where  $\mathbf{z}_{i-1}$  is a unit vector of the axis of motion, given in the first three elements of the third column of the matrix  $\mathbf{T}_i$ , Eq. (A.2). Consequently, using Eqs. (22)–(33), the joint torques  $u_i$  are

$$u_i = \sum_{j=1}^n h_{ij} \ddot{q}_j + u'_i, \quad i = 1 \text{ to } n, \quad (34)$$

$$\sum_{j=1}^n h_{ij} \ddot{q}_j = \mathbf{z}_{i-1}^T (\mathbf{n}'_{ia1} + \mathbf{n}'_{ia2} + \mathbf{n}'_{ia3}) \ddot{\mathbf{q}}. \quad (35)$$

$$u'_i = \mathbf{z}_{i-1}^T \mathbf{n}'_{ic}. \quad (36)$$

Herein,  $\dot{q}_i(t_k)$  and  $\ddot{q}_i(t_k)$  are used to calculate  $h_{ij}$ , Eq. (35), and  $u'_i$ , Eq. (36), as given at the beginning of Algorithm 1.

The computations needed to solve the linear system of Eq. (34) in order to compute  $\ddot{q}_i(t_k)$  can be performed using Gaussian elimination.

## 5. Examples

### 5.1. Calculation of vectors $\mathbf{b}_{ik}$ and $\mathbf{b}_{ikj}$ of 6-DoF serial-chain robot

Herein, the calculation of  $\dot{\mathbf{v}}_i^{cm}$ , Eq. (5), of a 6-DoF serial-chain robot as a function of the vectors  $\mathbf{b}_{ik}$  and  $\mathbf{b}_{ikj}$ , needed for the calculation of vectors  $\mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{e}_{ik}$ , Eqs. (13)–(15), is systematically presented.

$$\dot{\mathbf{v}}_1^{cm} = \mathbf{b}_{11} \dot{q}_1 + \mathbf{b}_{111} \dot{q}_1^2 \quad (37)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_2^{cm} = \mathbf{b}_{21} \dot{q}_1 + \mathbf{b}_{22} \dot{q}_2 + \mathbf{b}_{211} \dot{q}_1^2 + \mathbf{b}_{212} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \mathbf{b}_{222} \dot{q}_2^2 \quad (38)$$

$$\dot{\mathbf{v}}'_i = \mathbf{b}_{i1} \dot{q}_1 + \mathbf{b}_{i2} \dot{q}_2 + \mathbf{b}_{i3} \dot{q}_3 + \mathbf{b}_{i11} \dot{q}_1^2 + \mathbf{b}_{i12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \mathbf{b}_{i13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \mathbf{b}_{i22} \dot{q}_2^2 + \mathbf{b}_{i23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \mathbf{b}_{i33} \dot{q}_3^2, \quad i = 3, 4, 5, 6 \quad (39)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_3^{cm} = \dot{\mathbf{v}}'_3 \quad (40)$$

$$\dot{\mathbf{v}}''_i = \mathbf{b}_{i4} \dot{q}_4 + \mathbf{b}_{i14} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \mathbf{b}_{i24} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \mathbf{b}_{i34} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \mathbf{b}_{i44} \dot{q}_4^2 \quad (41)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_4^{cm} = \dot{\mathbf{v}}'_4 + \dot{\mathbf{v}}''_4 \quad (42)$$

$$\dot{\mathbf{v}}''_i = \mathbf{b}_{i5} \dot{q}_5 + \mathbf{b}_{i15} \dot{q}_1 \dot{q}_5 + \mathbf{b}_{i25} \dot{q}_2 \dot{q}_5 + \mathbf{b}_{i35} \dot{q}_3 \dot{q}_5 + \mathbf{b}_{i45} \dot{q}_4 \dot{q}_5 + \mathbf{b}_{i55} \dot{q}_5^2, \quad i = 5, 6 \quad (43)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_5^{cm} = \dot{\mathbf{v}}'_5 + \dot{\mathbf{v}}''_5 + \dot{\mathbf{v}}'''_5 \quad (44)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_6^{cm} = \dot{\mathbf{v}}'_6 + \dot{\mathbf{v}}''_6 + \dot{\mathbf{v}}'''_6 + \mathbf{b}_{66} \ddot{q}_6 + [\mathbf{b}_{616} \dot{q}_1 + \mathbf{b}_{626} \dot{q}_2 + \mathbf{b}_{636} \dot{q}_3 + \mathbf{b}_{646} \dot{q}_4 + \mathbf{b}_{656} \dot{q}_5 + \mathbf{b}_{666} \dot{q}_6] \dot{q}_6 \quad (45)$$

The vectors  $\mathbf{b}_{ik}$  and  $\mathbf{b}_{ikj}$  of the serial-chain robot Lola 15 (RL15) with six rotational DoF, Fig. A1, are given in Appendix B.

### 5.2. Calculation of vectors $\mathbf{d}_{ik}$ and $\mathbf{d}_{ikj}$ of 6-DoF serial-chain robot

Herein, the calculation of the vectors  $\mathbf{N}_i$ , Eq. (15), of a 6-DoF serial-chain robot as a function of the vectors  $\mathbf{d}_{ik}$  and  $\mathbf{d}_{ikj}$ , needed for the calculation of vectors  $\mathbf{n}_{ic}$  and  $\mathbf{n}_{ia1}$ , Eqs. (22)–(24), is systematically presented.

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{d}_{11} \ddot{q}_1 + \mathbf{d}_{111} \dot{q}_1^2 \quad (46)$$

$$\mathbf{N}'_i = \mathbf{d}_{i1} \ddot{q}_1 + \mathbf{d}_{i2} \ddot{q}_2 + \mathbf{d}_{i11} \dot{q}_1^2 + \mathbf{d}_{i12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \mathbf{d}_{i22} \dot{q}_2^2, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6 \quad (47)$$

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}'_2 \quad (48)$$

$$\mathbf{N}''_i = \mathbf{d}_{i3} \ddot{q}_3 + \mathbf{d}_{i13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \mathbf{d}_{i23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \mathbf{d}_{i33} \dot{q}_3^2, \quad \mathbf{d}_{i3} = \mathbf{d}_{i2}, \quad \mathbf{d}_{i13} = \mathbf{d}_{i12}, \quad \mathbf{d}_{i23} = 2\mathbf{d}_{i22}, \quad \text{and } \mathbf{d}_{i33} = \mathbf{d}_{i22}, \quad i = 3, 4, 5, 6 \quad (49)$$

$$\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}'_3 + \mathbf{N}''_3 \quad (50)$$

$$\mathbf{N}'''_i = \mathbf{d}_{i4}\ddot{q}_4 + \mathbf{d}_{i14}\dot{q}_1\dot{q}_4 + \mathbf{d}_{i24}\dot{q}_2\dot{q}_4 + \mathbf{d}_{i34}\dot{q}_3\dot{q}_4 + \mathbf{d}_{i44}\dot{q}_4^2, \quad i = 4, 5, 6 \quad (51)$$

$$\mathbf{N}_4 = \mathbf{N}'_4 + \mathbf{N}''_4 + \mathbf{N}'''_4 \quad (52)$$

$$\mathbf{N}''''_i = \mathbf{d}_{i5}\ddot{q}_5 + \mathbf{d}_{i15}\dot{q}_1\dot{q}_5 + \mathbf{d}_{i25}\dot{q}_2\dot{q}_5 + \mathbf{d}_{i35}\dot{q}_3\dot{q}_5 + \mathbf{d}_{i45}\dot{q}_4\dot{q}_5 + \mathbf{d}_{i55}\dot{q}_5^2, \quad i = 5, 6 \quad (53)$$

$$\mathbf{N}_5 = \mathbf{N}'_5 + \mathbf{N}''_5 + \mathbf{N}''''_5 + \mathbf{N}_5 \quad (54)$$

$$\mathbf{N}_6 = \mathbf{N}'_6 + \mathbf{N}''_6 + \mathbf{N}''''_6 + \mathbf{N}_6 + \mathbf{d}_{66}\ddot{q}_6 + \mathbf{d}_{616}\dot{q}_1\dot{q}_6 + \mathbf{d}_{626}\dot{q}_2\dot{q}_6 + \mathbf{d}_{636}\dot{q}_3\dot{q}_6 + \mathbf{d}_{646}\dot{q}_4\dot{q}_6 + \mathbf{d}_{656}\dot{q}_5\dot{q}_6 + \mathbf{d}_{666}\dot{q}_6^2 \quad (55)$$

The vectors  $\mathbf{d}_{ik}$  and  $\mathbf{d}_{ijk}$  of industrial robot RL15 are given in [Appendix B](#).

### 5.3. Vectors $\mathbf{n}'_{ic}$ , $\mathbf{n}'_{ia1}$ , $\mathbf{n}'_{ia2}$ , and $\mathbf{n}'_{ia3}$ of RL15

Calculation of the vectors  $\mathbf{n}'_{ic}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia2}$ , and  $\mathbf{n}'_{ia3}$ , [Eqs. \(22\)–\(31\)](#), for the RL15 is presented here.

#### 5.3.1. Vectors $\mathbf{n}'_{ic}$

$$\mathbf{n}'_{6c} = \mathbf{d}_6 + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_6 + \mathbf{p}_7 \times \mathbf{f}_7 \quad (56)$$

$$\mathbf{n}'_{5c} = \mathbf{n}'_{6c} + \mathbf{d}_5 + \mathbf{l}_5 \times \mathbf{e}_5, \quad (57)$$

$$\mathbf{n}'_{4c} = \mathbf{n}'_{5c} + \mathbf{d}_4 + \mathbf{l}_4 \times \mathbf{e}_4, \quad (58)$$

$$\mathbf{n}'_{3c} = \mathbf{n}'_{4c} + \mathbf{d}_3 + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_4, \quad \text{where } \mathbf{E}_4 = \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6 + \mathbf{f}_7, \quad (59)$$

$$\mathbf{n}'_{2c} = \mathbf{n}'_{3c} + \mathbf{d}_2 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_3, \quad \text{where } \mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_4 + \mathbf{e}_3, \quad (60)$$

$$\mathbf{n}'_{1cz} = \mathbf{n}'_{2cz} + d_{1z} + l_{1x}e_{1y} - l_{1y}e_{1x} + p_{1x}^*E_{y2} - p_{1y}^*E_{x2}, \quad \text{where } E_{x2} = E_{x3} + e_{x2}, E_{y2} = E_{y3} + e_{y2}. \quad (61)$$

#### 5.3.2. Vectors $\mathbf{n}'_{ia1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{6a1} &= [\mathbf{n}'_{61a1} \quad \mathbf{n}'_{62a1} \quad \mathbf{n}'_{63a1} \quad \mathbf{n}'_{64a1} \quad \mathbf{n}'_{65a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1}] \\ &= [\mathbf{d}_{61} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{61} \quad \mathbf{d}_{62} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{62} \quad \mathbf{d}_{63} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{63} \quad \mathbf{d}_{64} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{64} \quad \mathbf{d}_{65} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{65} \quad \mathbf{d}_{66} + \mathbf{l}_6 \times \mathbf{e}_{66}], \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{5a1} &= [\mathbf{n}'_{51a1} \quad \mathbf{n}'_{52a1} \quad \mathbf{n}'_{53a1} \quad \mathbf{n}'_{54a1} \quad \mathbf{n}'_{55a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1}] \\ &= \left[ \begin{array}{cc} \sum_{k=5}^6 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) & \sum_{k=5}^6 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \\ \sum_{k=5}^6 (\mathbf{d}_{k3} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k3}) & \sum_{k=5}^6 (\mathbf{d}_{k4} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k4}) \\ \times \sum_{k=5}^6 (\mathbf{d}_{k5} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k5}) & \mathbf{n}'_{66a1} \end{array} \right], \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{4a1} &= [\mathbf{n}'_{41a1} \quad \mathbf{n}'_{42a1} \quad \mathbf{n}'_{43a1} \quad \mathbf{n}'_{44a1} \quad \mathbf{n}'_{55a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1}] \\ &= \left[ \begin{array}{cc} \sum_{k=4}^6 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) & \sum_{k=4}^6 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \\ \sum_{k=4}^6 (\mathbf{d}_{k3} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k3}) & \sum_{k=4}^6 (\mathbf{d}_{k4} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k4}) \end{array} \quad \mathbf{n}'_{55a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1} \right], \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{3a1} &= [\mathbf{n}'_{31a1} \quad \mathbf{n}'_{32a1} \quad \mathbf{n}'_{33a1} \quad \mathbf{n}'_{44a1} \quad \mathbf{n}'_{55a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1}] \\ &= \left[ \begin{array}{cc} \sum_{k=3}^6 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) & \sum_{k=3}^6 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \\ \sum_{k=3}^6 (\mathbf{d}_{k3} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k3}) & \mathbf{n}'_{44a1} \end{array} \quad \mathbf{n}'_{55a1} \quad \mathbf{n}'_{66a1} \right], \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{2a1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}'_{21a1} & \mathbf{n}'_{22a1} & \mathbf{n}'_{33a1} & \mathbf{n}'_{44a1} & \mathbf{n}'_{55a1} & \mathbf{n}'_{66a1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^6 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) & \sum_{k=2}^6 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) & \mathbf{n}'_{33a1} & \mathbf{n}'_{44a1} & \mathbf{n}'_{55a1} & \mathbf{n}'_{66a1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{66}$$

$$\mathbf{n}'_{1a1z} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^6 (d_{k1z} + l_{kx}e_{k1y} - l_{ky}e_{k1x}) & n'_{22a1z} & n'_{33a1z} & n'_{44a1z} & n'_{55a1z} & n'_{66a1z} \end{bmatrix}. \tag{67}$$

5.3.3. Vectors  $\mathbf{n}'_{ia2}$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{4a2} &= \mathbf{n}'_{5a2} = \mathbf{n}'_{6a2} = \mathbf{0} \\ \mathbf{n}'_{3a2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}'_{31a2} & \mathbf{n}'_{32a1} & \mathbf{n}'_{33a2} & \mathbf{n}'_{34a2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_{41} & \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_{42} & \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_{43} & \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_{44} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{68}$$

where  $E_{x41} = e_{x41} + e_{x51} + e_{x61}$ ,  $E_{y41} = e_{y41} + e_{y51} + e_{y61}$ ,  $\mathbf{E}_{42} = \mathbf{e}_{42} + \mathbf{e}_{52} + \mathbf{e}_{62}$ ,  $\mathbf{E}_{43} = \mathbf{e}_{43} + \mathbf{e}_{53} + \mathbf{e}_{63}$ ,  $\mathbf{E}_{44} = \mathbf{e}_{44} + \mathbf{e}_{54} + \mathbf{e}_{64}$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{2a2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}'_{21a2} & \mathbf{n}'_{22a2} & \mathbf{n}'_{23a2} & \mathbf{n}'_{34a2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^3 (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)1}) & \sum_{k=2}^3 (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)2}) & \sum_{k=2}^3 (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)3}) & \mathbf{n}'_{34a2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{69}$$

where  $E_{x31} = E_{x41} + e_{x31}$ ,  $E_{y31} = E_{y41} + e_{y31}$ ,  $\mathbf{E}_{32} = \mathbf{E}_{42} + \mathbf{e}_{32}$ ,  $\mathbf{E}_{33} = \mathbf{E}_{43} + \mathbf{e}_{33}$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{1a2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}'_{11a2} & \mathbf{n}'_{22a2} & \mathbf{n}'_{23a2} & \mathbf{n}'_{34a2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^3 (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)1}) & \sum_{k=1}^3 (\mathbf{p}_k^* \times \mathbf{E}_{(k+1)2}) & \mathbf{n}'_{23a2} & \mathbf{n}'_{34a2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{n}'_{1a2z} &= \begin{bmatrix} n'_{z11a2} & n'_{z12a2} & n'_{z23a2z} & n'_{z34a2z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n'_{z21a2} + p_{1x}^* E_{y21} - p_{1y}^* E_{x21} & n'_{z22a2} + p_{1x}^* E_{y22} - p_{1y}^* E_{x22} & n'_{z23a2z} & n'_{z34a2z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{70}$$

where  $E_{x21} = E_{x31} + e_{x21}$ ,  $E_{y21} = E_{y31} + e_{y21}$ ,  $E_{x22} = E_{x32} + e_{x22}$ ,  $E_{y22} = E_{y32} + e_{y22}$ .

5.3.4. Vectors  $\mathbf{n}'_{ia3}$

$$\mathbf{n}_{3a3} = \mathbf{p}_3^* \times \sum_{k=5}^6 \mathbf{E}_{kk} \ddot{q}_k = \sum_{k=5}^6 \mathbf{n}_{3ka3} \ddot{q}_k, \text{ where } \mathbf{E}_{55} = \mathbf{e}_{55} + \mathbf{e}_{65}, \mathbf{E}_{66} = \mathbf{e}_{66}. \tag{71}$$

$$\mathbf{n}_{2a3} = \mathbf{p}_2^* \times \sum_{k=4}^6 \mathbf{E}_{kk} \ddot{q}_k = \sum_{k=4}^6 \mathbf{n}_{2ka3} \ddot{q}_k, \tag{72}$$

$$\mathbf{n}_{1a3} = \mathbf{p}_1^* \times \sum_{k=3}^6 \mathbf{E}_{kk} \ddot{q}_k = \sum_{k=3}^6 \mathbf{n}_{1ka3} \ddot{q}_k, \tag{73}$$

$$\mathbf{n}'_{3a3} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_{35a3} & \mathbf{n}_{36a3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{E}_{55} & \mathbf{p}_3^* \times \mathbf{e}_{66} \end{bmatrix}, \tag{74}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{2a3} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_{24a3} & \mathbf{n}_{25a3} + \mathbf{n}_{35a3} & \mathbf{n}_{26a3} + \mathbf{n}_{36a3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{44} & (\mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^*) \times \mathbf{E}_{55} & (\mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^*) \times \mathbf{e}_{66} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{1a3} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_{13a3} & \mathbf{n}_{14a3} + \mathbf{n}_{24a3} & \mathbf{n}_{15a3} + \mathbf{n}_{25a3} + \mathbf{n}_{35a3} & \mathbf{n}_{16a3} + \mathbf{n}_{26a3} + \mathbf{n}_{36a3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{E}_{33} & (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^*) \times \mathbf{E}_{44} & (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^*) \times \mathbf{E}_{55} & (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^*) \times \mathbf{e}_{66} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{76}$$

#### 5.4. Numerical example (toy model) of 4-DoF spatial disorientation trainer (SDT)

A numerical example (toy model) of the SDT is given in order to explain all the key steps of the approach proposed in the paper. The SDT is designed as a 4-DoF manipulator with rotational axes, Fig. A2. The vectors  $\mathbf{e}_{ik}$ ,  $\mathbf{e}_{ik}$ ,  $\mathbf{d}_i$ ,  $\mathbf{d}_{ik}$ , and  $\mathbf{r}_i^{\text{cm}}$ , needed for the calculation of the vectors  $\mathbf{n}_{nc}$ ,  $\mathbf{n}_{ic}$ ,  $\mathbf{n}_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}_{ia2}$ , and  $\mathbf{n}_{ia3}$ , Eqs. (22)–(26), are given in [40]. Herein,  $\mathbf{p}_1^* = a_1 [c_1 \quad s_1 \quad 0]^T$ ,  $\mathbf{p}_2^* = [0 \quad 0 \quad d_2]^T$ ,  $\mathbf{p}_3^* = \mathbf{p}_4^* = \mathbf{p}_5^* = \mathbf{0}$ .

The vectors  $\mathbf{n}'_{ic}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia1}$ ,  $\mathbf{n}'_{ia2}$ , and  $\mathbf{n}'_{ia3}$ , Eqs. (22)–(31), for the SDT are

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{4c} &= \mathbf{d}_4 + \mathbf{l}_4 \times \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{n}_{3c} = \mathbf{d}_3 + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{n}_{2c} = \mathbf{d}_2 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{n}_{1c} \\ &= \mathbf{d}_1 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{E}_2 \quad \text{where } \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\mathbf{n}_{4a1} = \sum_{k=1}^4 (\mathbf{d}_{4k} + \mathbf{l}_4 \times \mathbf{e}_{4k}) \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^4 \mathbf{n}_{4ka1} \ddot{q}_k, \quad \mathbf{n}_{3a1} = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{d}_{3k} + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{e}_{3k}) \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^3 \mathbf{n}_{3ka1} \ddot{q}_k, \quad (78)$$

$$\mathbf{n}_{2a1} = \sum_{k=1}^2 (\mathbf{d}_{2k} + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{e}_{2k}) \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}_{2ka1} \ddot{q}_k, \quad \mathbf{n}_{1a1} = (\mathbf{d}_{11} + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{11}) \ddot{q}_1 = \mathbf{n}_{11a1} \ddot{q}_1, \quad (79)$$

$$\mathbf{n}'_{4a1} = [\mathbf{n}_{41a1} \quad \mathbf{n}_{42a1} \quad \mathbf{n}_{43a1} \quad \mathbf{n}_{44a1}] = [\mathbf{d}_{41} + \mathbf{l}_4 \times \mathbf{e}_{41} \quad \mathbf{d}_{42} + \mathbf{l}_4 \times \mathbf{e}_{42} \quad \mathbf{d}_{43} + \mathbf{l}_4 \times \mathbf{e}_{43} \quad \mathbf{d}_{44} + \mathbf{l}_4 \times \mathbf{e}_{44}], \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{3a1} &= \mathbf{n}_{3a1} + \mathbf{n}_{4a1} = [\mathbf{n}'_{31a1} \quad \mathbf{n}'_{32a1} \quad \mathbf{n}'_{33a1} \quad \mathbf{n}'_{44a1}] \\ &= \left[ \sum_{k=3}^4 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) \quad \sum_{k=3}^4 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \quad \sum_{k=3}^4 (\mathbf{d}_{k3} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k3}) \quad \mathbf{n}'_{44a1} \right], \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_{2a1} &= \mathbf{n}_{2a1} + \mathbf{n}'_{3a1} = [\mathbf{n}'_{21a1} \quad \mathbf{n}'_{22a1} \quad \mathbf{n}'_{33a1} \quad \mathbf{n}'_{44a1}] \\ &= \left[ \sum_{k=2}^4 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) \quad \sum_{k=2}^4 (\mathbf{d}_{k2} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k2}) \quad \mathbf{n}'_{33a1} \quad \mathbf{n}'_{44a1} \right], \end{aligned} \quad (82)$$

$$\mathbf{n}'_{1a1} = \mathbf{n}_{1a1} + \mathbf{n}'_{2a1} = [\mathbf{n}'_{11a1} \quad \mathbf{n}'_{22a1} \quad \mathbf{n}'_{33a1} \quad \mathbf{n}'_{44a1}] = \left[ \sum_{k=1}^4 (\mathbf{d}_{k1} + \mathbf{l}_k \times \mathbf{e}_{k1}) \quad \mathbf{n}'_{22a1} \quad \mathbf{n}'_{33a1} \quad \mathbf{n}'_{44a1} \right], \quad (83)$$

$$\mathbf{n}_{4a2} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_3^* = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{n}_{3a2} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}'_{4a2} = \mathbf{n}'_{3a2} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}], \quad (84)$$

$$\mathbf{n}'_{2a2} = [\mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{31} \quad \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{32} \quad \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{33} \quad \mathbf{0}], \quad (85)$$

$$\mathbf{n}'_{1a2} = [\mathbf{p}_1^* \times \mathbf{E}_{21} + \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{31} \quad \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{E}_{22} + \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{32} \quad \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{33} \quad \mathbf{0}], \quad (86)$$

$$\text{where } \mathbf{E}_{31} = \mathbf{e}_{41} + \mathbf{e}_{31}, \quad \mathbf{E}_{32} = \mathbf{e}_{42} + \mathbf{e}_{32}, \quad \mathbf{E}_{33} = \mathbf{e}_{43} + \mathbf{e}_{33}, \quad \mathbf{E}_{21} = \mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{21}, \quad \mathbf{E}_{22} = \mathbf{e}_{32} + \mathbf{e}_{22}, \quad (87)$$

$$\mathbf{n}'_{2a3} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{E}_{44}], \quad \mathbf{n}'_{1a3} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{E}_{33} \quad (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^*) \times \mathbf{E}_{44}], \quad \text{where } \mathbf{E}_{44} = \mathbf{e}_{44}. \quad (88)$$

The vectors  $\mathbf{z}_{i-1}^T$ , required for the torque  $u_i$  calculation, Eqs. (34)–(36), are given by Eq. (89). Herein, shorthand notations,  $\sin(q_i) = s_i$ ,  $\cos(q_i) = c_i$ ,  $\sin(q_i + q_j) = s_{ij}$ , and  $\cos(q_i + q_j) = c_{ij}$ , and HTMs of the SDT, given in [40], were used.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0^T &= [0 \quad 0 \quad 1], \quad \mathbf{z}_1^T = [0 \quad 0 \quad 1], \quad \mathbf{z}_2^T = [s_{12} \quad -c_{12} \quad 0], \quad \mathbf{z}_3^T = [s_{12} \quad -c_{12} \quad 0], \\ \mathbf{z}_3^T &= [c_{12}c_3 \quad s_{12}c_3 \quad s_3]. \end{aligned} \quad (89)$$

In this numerical example, the consecutive link positions  $q_i(t_k)$ , velocities  $\dot{q}_i(t_k)$ , and accelerations  $\ddot{q}_i(t_k)$  of the SDT are used as the input. Based on these data, and the inertial and geometric parameters of the SDT links, the torques  $u_i$  are calculated using RNEA and proposed mRNEA. The same results were obtained using both algorithms, Fig. A3(a). Consequently, solution of the linear system of Eqs. (34) gave the values of  $\ddot{q}_i(t_k)$  that coincides with the input accelerations, Fig. A3(b).

**Table 1**  
Computational complexity of presented  $O(n)$  forward dynamics algorithm applied to robots with different numbers of links.

$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
241 M 188A	484 M 376A	854 M 662A	1356 M 1038A

**Table 2**  
Number of computations to solve for FD.

Method	Multiplications	Additions
Walker and Orin's method 1 (1982) [5,6]	3418	2502
Walker and Orin's method 2 (1982) [5,6]	2308	1692
Walker and Orin's method 3 (1982) [5,6]	1627	1255
Featherstone (1983) [32]	2190	1915
Saha – based on DeNOC (2003) [29]	2008	1919
Mohan and Saha – based on DeNOC (2007) [30]	1948	1667
<b>FD based on mRNEA – presented method</b>	<b>1356</b>	<b>1038</b>

### 6. Computational efficiency

A detailed description of the computational efficiency calculation (counted arithmetic operations for all terms) of the proposed FD algorithm as applied to RL15 is provided in Table C1.

In Table C1, it is shown that the numbers of computations to obtain the joint accelerations of 6-DoF robot RL15 are 1480 M and 1152 A (here, M stands for multiplications/divisions, and A stands for additions/subtractions). In order to compare the computational complexity of the presented algorithm with similar algorithms,  $\mathbf{r}_i^{cm}$ ,  $\mathbf{p}_e$ , and  $\mathbf{I}_i^{cm}$  are herein also considered as inputs into FD (247M and 114A). Taking all of this into account, the total number of counts for FD is shown in Table C1.

An identical algorithm which uses only the diagonal and bottom half of the off-diagonal terms is more efficient (Table 2). Consequently, it can be concluded that the presented method for the FD calculation is one of the most efficient of all methods given in the literature. Moreover, this algorithm is very simple to apply to a specific serial-chain robotic system, which gives it a significant advantage over the other presented algorithms in the literature.

In Table 1, the number of counts of the proposed FD algorithm depending on the number of links  $n$  is given. Similar to the computational complexity of the recursive NE inverse dynamics algorithm, the presented algorithm is of order  $(n)$ .

Table 2 lists a comparison of the computational complexity of seven methods to solve FD for a serial-chain robot with six rotational DoF.

### 7. FD algorithm relative to manipulator actuators

Similar to Eq. (1), the motion equations for the manipulator relative to the torques/forces of the robot actuators can be written as

$$\mathbf{H}_a(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{u}'_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_{ea}) = \mathbf{u}_a, \tag{90}$$

$$\mathbf{u}'_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_{ea}) = \mathbf{C}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_a(\mathbf{q}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{k}_{ea} + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}). \tag{91}$$

Herein,  $\mathbf{H}_a(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{u}'_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{k}_{ea})$ , and  $\mathbf{u}_a$  relate to the actuator rotors; terms  $u'_{ai}$  and  $h_{aij}$  for the RL15 are given in Appendix D.  $\mathbf{F}_v$  denotes an  $n \times n$  diagonal matrix of viscous friction coefficients  $f_{vi}$ . The static friction torques are considered as Coulomb friction torques;  $\mathbf{F}_s$  is an  $n \times n$  diagonal matrix of the Coulomb friction constants. Although the Coulomb friction constant takes one value when  $\dot{q}_i = 0$ , the static coefficient (and lower value when  $\dot{q}_i \neq 0$ ), the dynamic coefficient, and the same value  $\mu_{si}$  of this constant are assumed in both cases [47]. Herein,  $\text{sign}(\dot{\mathbf{q}})$  denotes an  $n \times 1$  vector whose components are given by the sign functions of single joint velocities.

Point 4 of Algorithm 1 calculates the actuator torques  $\mathbf{u}_a$ , which are thereafter correct according to the actuator capabilities. If some absolute value of  $u_{ai}$  exceeds its limit, it is reduced to the maximum possible. These achievable values of  $u_{ai}$  are then used in the following linear system of  $n$  equations to calculate the achievable (realistic) joint accelerations  $\ddot{q}_i$ :

$$\sum_{j=1}^n h_{aij} \ddot{q}_j = u_{ai} - u'_{ai}, \quad i = 1 \text{ to } n. \tag{92}$$

Finally, the joint velocities and positions are calculated as described at the end of Algorithm 1.

## 8. Results: verification of proposed FD algorithm

The proposed FD algorithm was tested during a simulation of different movements of the RL15 within its simulation system. The considered application program consists of 13 movements of the RL15 (the end effector path is shown in Fig. A4). In the first 10 movements, the end effector moves along the path without stopping. The first movement is PTP, the next nine are CP, and the last three are PTP movements.

The maximum link angular velocities and accelerations of the RL15 for axes  $i = 1$  to 6 are 3.05, 3.46, 3.08, 2.66, 1.62, and 6.67 rad/s, and 3.75, 2.1, 3.75, 3.75, 1.5, and 6.0 rad/s<sup>2</sup>, respectively. Within the simulation program, the external forces were  $f_{ex} = 100$ ,  $f_{ey} = 100$  and  $f_{ez} = 150$  N, and  $\Delta t$  was 0.01 s. Herein, the determination of the inertial and geometric parameters of the robot links is performed using the CATIA software. The viscous friction coefficients and the Coulomb friction constants of the robot joints are given in Appendix D. The geometric coupling effects of the link movements, the gear ratios of the robot links and the terms  $u'_{ai}$  and  $h_{aij}$ , Eqs. (90)–(92), are also given in Appendix D. The motor data for RL15 are presented in Appendix E.

Fig. A5 presents the diagrams of the joint torques  $u_i$  calculated with the ordinary RNEA (ordinary ID algorithm) and with the mRNEA. The results of the simulation presented in Fig. A5 prove that the joint torques calculated with these two algorithms are identical in each interpolation cycle.

Algorithm 1 was also tested in the presented simulation example. Figs. A6 and A7 show the actuator torques and link angular accelerations, velocities and positions, respectively, calculated with and without the application of Algorithm 1. From these diagrams, it can be seen that for certain interpolation cycles, the actuators cannot achieve the required torques for the programmed velocities and accelerations, which produces delays in the programmed link movements. From the diagrams given in the presented figures, it can be seen that Algorithm 1 calculates only achievable joint velocities. Owing to this fact, contributions of the presented algorithm are as follows:

- (1) It can be used to program the feasible robot movements;
- (2) It can be used within the robot design given that it enables the calculation of the true values of the forces and moments acting on the robot links and joints (taking into account the robot actuators' possibilities).

The diagrams presented in Figs. A6 and A7 show that in the interpolation cycles when the robot axes cannot achieve the accelerations of the programmed movements, Algorithm 1 replaces the unachievable values of the joint velocities and accelerations with values that can be achieved. Consequently, the end effector path differs slightly from the programmed path.

## 9. Conclusions

Dynamic model-based robot simulation is necessary for the correct simulation of robot movements. In order to check if the desired joint velocities are feasible, a dynamic model-based robot simulation system relies on a robot FD model and computes the joint accelerations in every interpolation cycle.

In this study, the mRNEA that gives the mass matrix  $\mathbf{H}$  and the bias vector  $\mathbf{u}'$  of a dynamic model was explicitly presented. Consequently, the proposed mRNEA allows for solving FD by calculating ID only once. It was shown that this FD algorithm does not need to determine the input vector  $\mathbf{u}$  of the FD algorithm, which additionally increases the efficiency of the presented method. Compared with the other methods given in the literature, the algorithm presented herein is one of the most efficient (Table 2). Apart from that, the method proposed herein is very simple to develop and implement.

The development of the proposed mRNEA and its application in the FD algorithm was presented using a serial-chain robot with six rotational DoF.

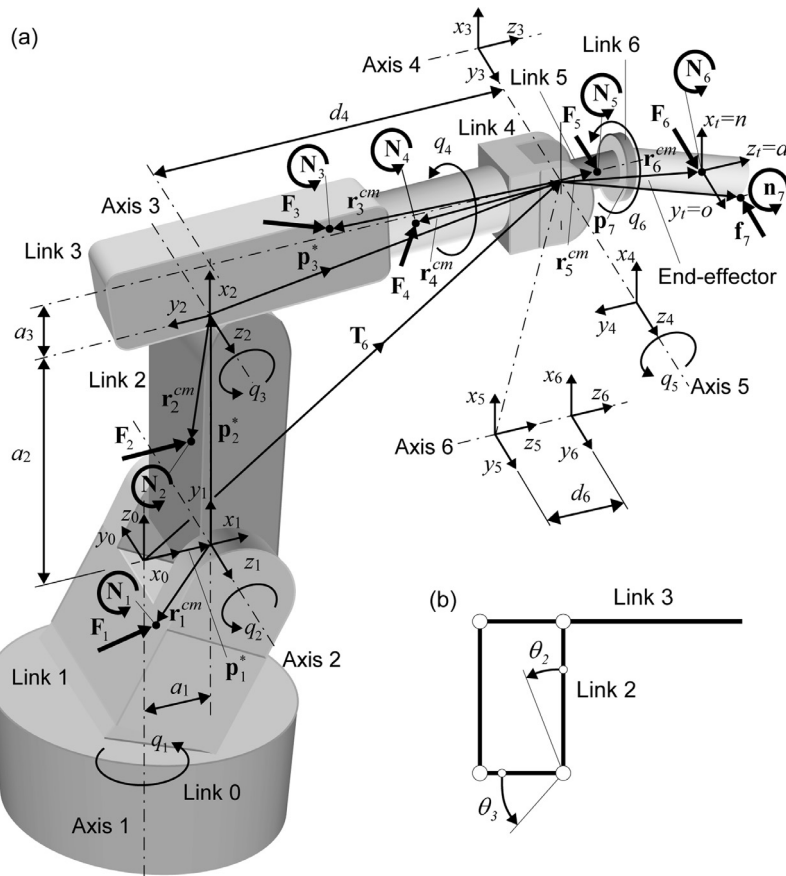
An algorithm which calculates the achievable joint velocities in each interpolation cycle based on the FD model and actuator capabilities was also given herein (Algorithm 1). This algorithm enables the setting of only attainable joint velocities within each interpolation cycle as determined from the joint acceleration by taking into account the achievable actuator torques. As a result, a precise simulation of the robot movements is provided, and calculation of the realistic forces and moments of the robot joints can be achieved when the simulation system is used in the design phase. Algorithm 1 can indicate to the operator that the programmed parameters of the movements are not achievable.

## Acknowledgments

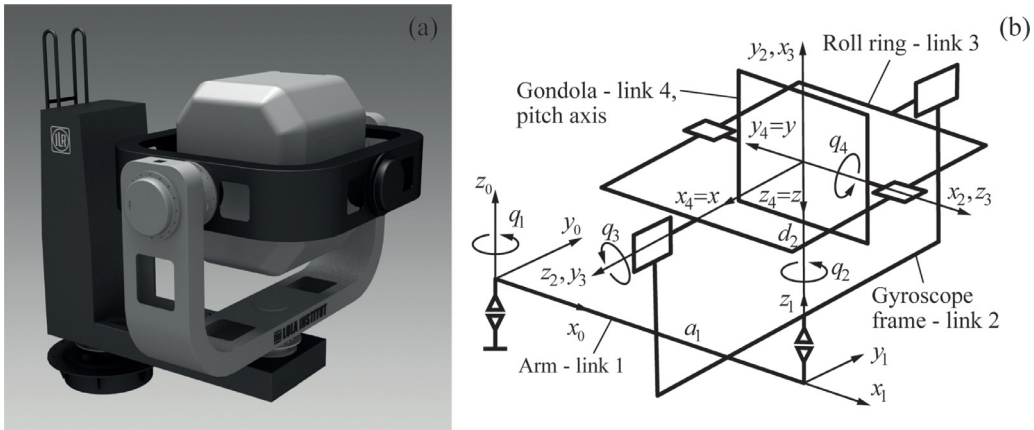
This research is supported by the Ministry of Education, Science and Technological Development of Serbia under the project "Development of devices for pilot training and dynamic simulation of modern fighter planes flights: 3DoF centrifuge and 4DoF spatial disorientation trainer" (2011–2019), no. TR 35023.

## Appendix A. Kinematics of RL15

The robot links of the RL15, shown in Fig. A1a), and their coordinate frames are denoted by the Denavit–Hartenberg (D–H) convention, Table A1.



**Fig. A1.** (a) Coordinate systems, mass centres and forces and moments of links of robot RL15 with six rotational DoF having three revolute joint axes intersecting at wrist. (b) Geometric coupling effect of movements of links 2 and 3.



**Fig. A2.** (a) 3D model of the four DoF SDT. (b) Coordinate frames of the SDT.

**Table A1**  
D-H parameters for the RL15 links.

Link	Variable [°]	$a$ [mm]	$d$ [mm]	$\alpha$ [°]
1	$q_1$	$a_1=200$	0	$\alpha_1=90$
2	$q_2+90$	$a_2=600$	0	0
3	$q_3$	$a_3=115$	0	$\alpha_3=90$
4	$q_4$	0	$d_4=825$	$\alpha_4=-90$
5	$q_5$	0	0	$\alpha_5=90$
6	$q_6$	0	0	0

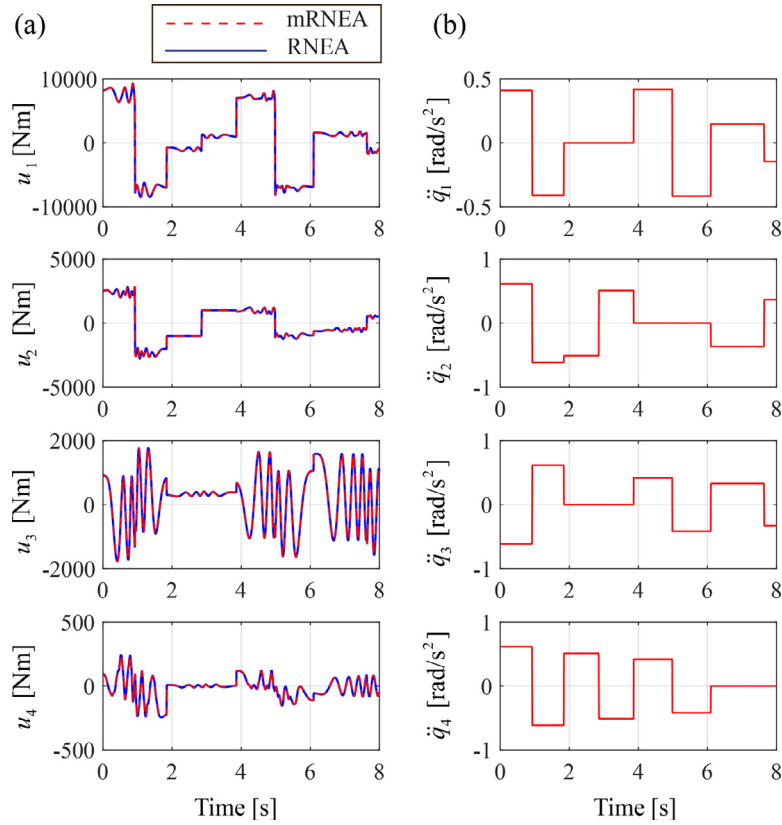


Fig. A3. (a) Link torques  $u_i$  calculated using RNEA and mRNEA. (b) Link accelerations of SDT.

The HTMs, which describe the relation between the successive links of the RL15, are

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & c_1 a_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & s_1 a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^1\mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & -s_2 a_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & c_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^2\mathbf{T}_3 &= \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & c_3 a_3 + s_3 d_4 \\ s_3 & 0 & -c_3 & s_3 a_3 - c_3 d_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 {}^3\mathbf{T}_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ -s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^4\mathbf{T}_5 &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^5\mathbf{T}_6 &= \begin{bmatrix} c_6 & s_6 & 0 & 0 \\ -s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Based on these matrices, the positions and orientations of the links and of the end effector with respect to the variables  $q_i$ ,  $i = 1$  to 6, are determined from the following matrices:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & c_1 a_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & s_1 a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} -c_1 s_2 & -c_1 c_2 & s_1 & c_1 v_5 \\ -s_1 s_2 & -s_1 c_2 & -c_1 & s_1 v_5 \\ c_2 & -s_2 & 0 & c_2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{T}_3 &= \begin{bmatrix} -v_1 & s_1 & v_2 & X_6 \\ -v_3 & -c_1 & v_4 & Y_6 \\ c_{23} & 0 & s_{23} & Z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{T}_4 &= \begin{bmatrix} v_{15} & -v_2 & v_{16} & X_6 \\ v_{17} & -v_4 & v_{18} & Y_6 \\ v_{19} & -s_{23} & v_{20} & Z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{T}_5 &= \begin{bmatrix} v_{21} & v_{16} & a_{x6} & X_6 \\ v_{23} & v_{18} & a_{y6} & Y_6 \\ v_{25} & v_{20} & a_{z6} & Z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{T}_6 &= \begin{bmatrix} n_{x6} & o_{x6} & a_{x6} & X_6 \\ n_{y6} & o_{y6} & a_{y6} & Y_6 \\ n_{z6} & o_{z6} & a_{z6} & Z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

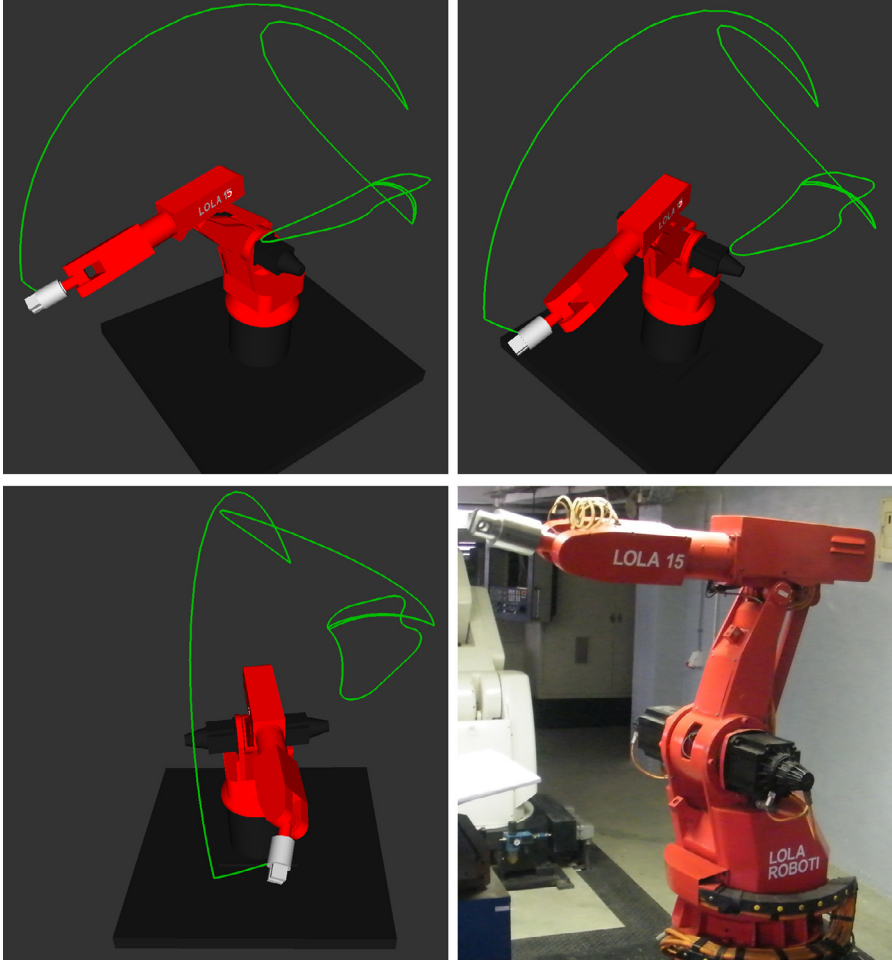


Fig. A4. Example of end effector path and velocity  $v_{ee}$  of end effector during movement and movement simulation of RL15.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= c_1 s_{23}, \quad v_2 = c_1 c_{23}, \quad v_3 = s_1 s_{23}, \quad v_4 = s_1 c_{23}, \quad v_5 = a_1 - v_{13}, \quad v_{12} = c_{23} a_3 + s_{23} d_4, \quad v_{13} = s_2 a_2, \quad v_{14} = c_2 a_2, \\
 v_{15} &= -v_1 c_4 - s_1 s_4, \quad v_{16} = s_1 c_4 - v_1 s_4, \quad v_{17} = c_1 s_4 - v_3 c_4, \quad v_{18} = -v_3 s_4 - c_1 c_4, \quad v_{19} = c_{23} c_4, \quad v_{20} = c_{23} s_4, \\
 v_{21} &= v_{15} c_5 - v_2 s_5, \quad v_{23} = v_{17} c_5 - v_4 s_5, \quad v_{25} = v_{19} c_5 - s_{23} s_5, \quad v_{31} = d_4 c_{23} - s_{23} a_3, \quad n_{x6} = v_{21} c_6 + v_{16} s_6, \\
 n_{y6} &= v_{23} c_6 + v_{18} s_6, \quad n_{z6} = v_{25} c_6 + v_{20} s_6, \quad o_{x6} = v_{16} c_6 - v_{21} s_6, \quad o_{y6} = v_{18} c_6 - v_{23} s_6, \quad o_{z6} = v_{20} c_6 - v_{25} s_6, \\
 a_{x6} &= v_{15} s_5 + v_2 c_5, \quad a_{y6} = v_{17} s_5 + v_4 c_5, \quad a_{z6} = v_{19} s_5 + s_{23} c_5, \quad X_6 = c_1 u_0, \quad Y_6 = s_1 u_0, \quad Z_6 = v_{12} + v_{14}, \quad v_0 = v_5 + v_{31}.
 \end{aligned}$$

## Appendix B. Vectors $\mathbf{b}_{ik}$ , $\mathbf{b}_{ikj}$ , $\mathbf{d}_{ik}$ , and $\mathbf{d}_{ikj}$ of RL15

The link angular velocity  $\boldsymbol{\omega}_i$ , angular acceleration  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ , linear velocity  $\mathbf{v}_i$ , and linear acceleration  $\dot{\mathbf{v}}_{i+1}$ ,  $i = 1$  to  $n$ , for a robot with  $n$  rotational joints are calculated as

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_{i+1} &= \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{z}_i \dot{q}_{i+1}, \\
 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \mathbf{z}_i \ddot{q}_{i+1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{z}_i \dot{q}_{i+1}, \\
 \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \mathbf{p}_{i+1}^*, \\
 \dot{\mathbf{v}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{v}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} \times \mathbf{p}_{i+1}^* + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \mathbf{p}_{i+1}^*).
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

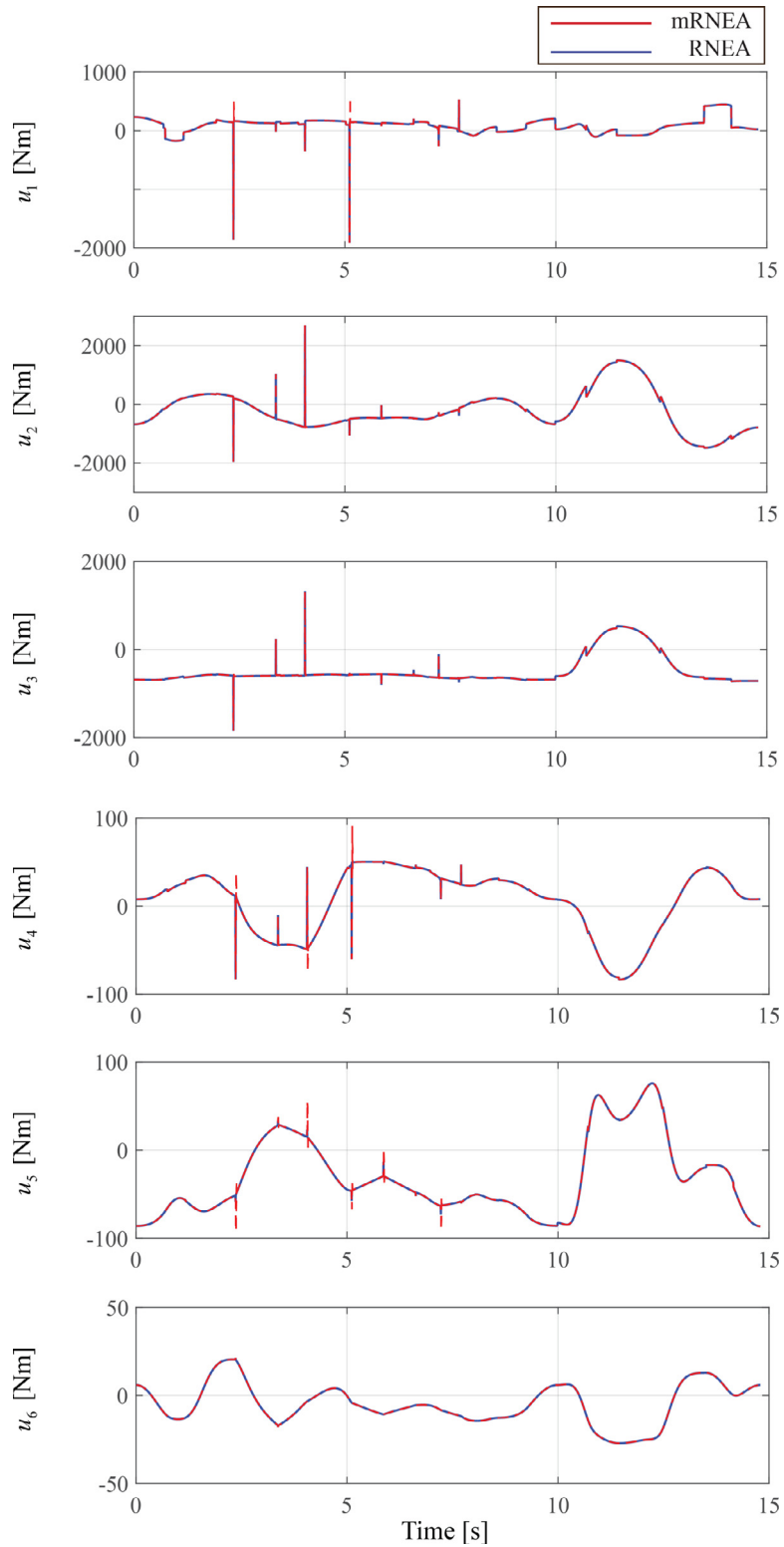


Fig. A5. Joint torque  $u_i$  calculated with ordinary RNEA and with mRNEA.

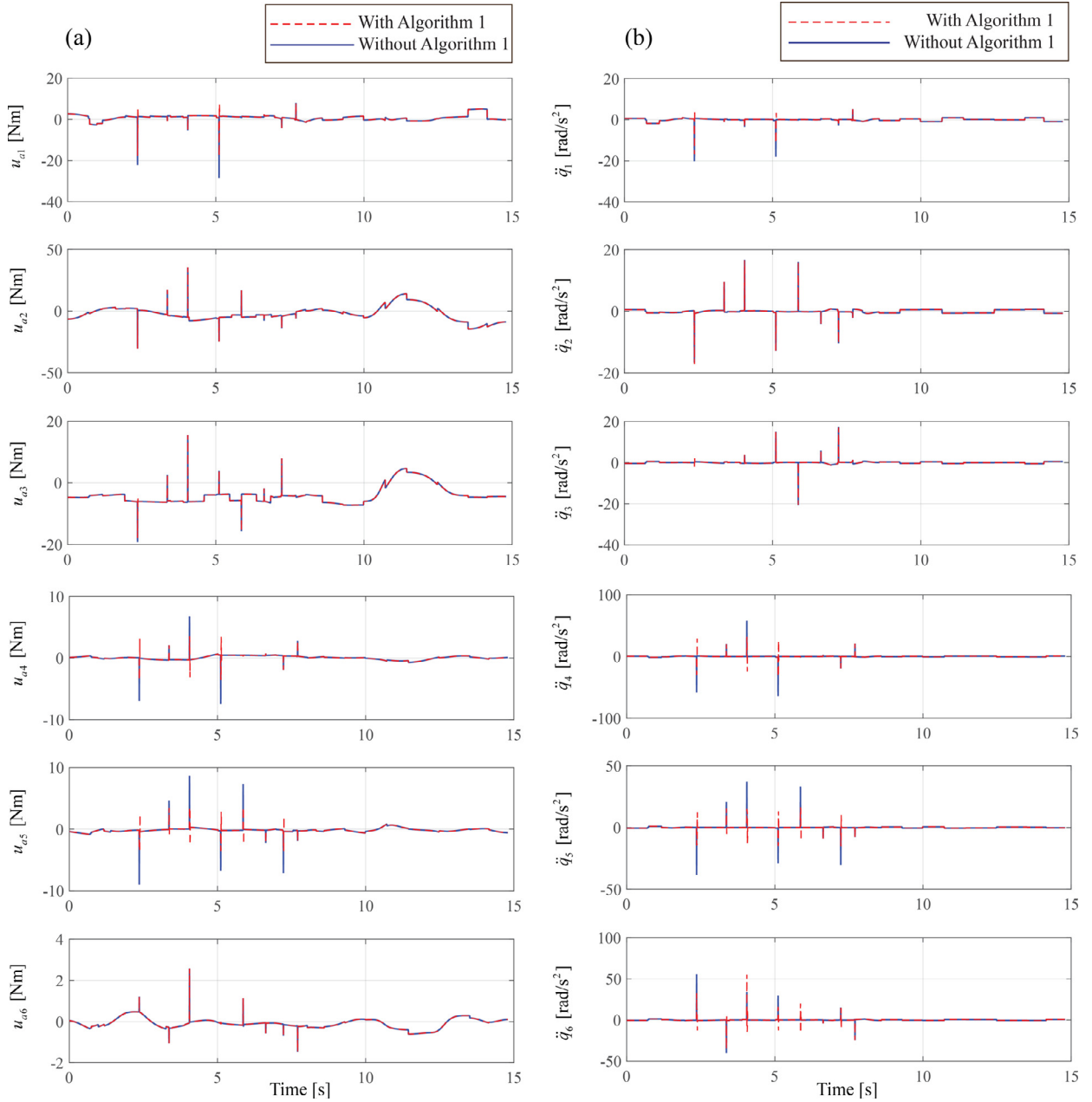


Fig. A6. (a) Actuator torque  $u_{ia}$  calculated with and without Algorithm 1. (b) Link angular acceleration  $\ddot{q}_i$  calculated with and without Algorithm 1.

The vectors  $\mathbf{b}_{ik}$  and  $\mathbf{b}_{ikj}$  of the RL15 are calculated using Eqs. (4) and (B.1) as follows:

$$\dot{\mathbf{v}}_1^{cm} = [p_{y1}^* - r_{y1} \quad p_{x1}^* + r_{x1} \quad 0]^T \dot{q}_1 + [-b_{11y} \quad b_{11x} \quad 0]^T \dot{q}_1^2, \tag{B.2}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_2^{cm} = \begin{bmatrix} -s_1 v_5 - r_{y2} \\ c_1 v_5 + r_{x2} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} c_1 v_6 \\ s_1 v_6 \\ -v_7 \end{bmatrix} \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} -b_{21y} \\ b_{21x} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} v_8 a_2 + s_1 v_{10} \\ v_9 a_2 - c_1 v_{10} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} c_1 v_7 \\ s_1 v_7 \\ v_{11} \end{bmatrix} \dot{q}_2^2, \tag{B.3}$$

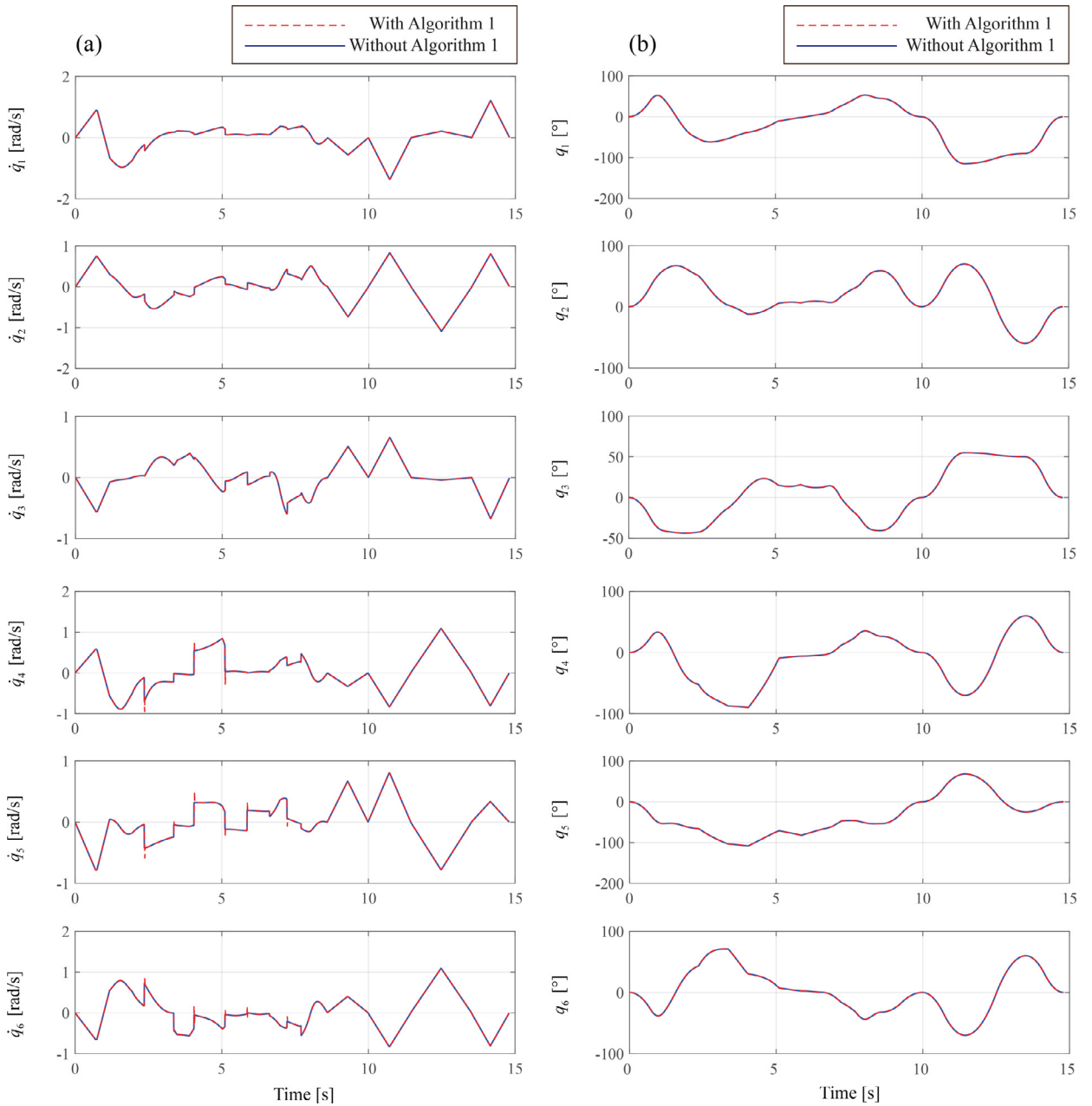


Fig. A7. (a) Link angular velocity  $\dot{q}_i$  calculated with and without Algorithm 1. (b) Link angular positions  $q_i$  calculated with and without Algorithm 1.

$v_6 = -r_{z2} - v_{14}$ ,  $v_7 = v_{13} - s_1 r_{y2} - c_1 r_{x2}$ ,  $v_8 = -c_1 s_2$ ,  $v_9 = -s_1 s_2$ ,  $v_{10} = 2r_{z2}$ ,  $v_{11} = r_{z2} - v_{14}$ ,  $v_{13}$ , and  $v_{14}$  are given in Eq. (A.2) and  $\mathbf{p}_1^* = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = a_1 [c_1 \quad s_1 \quad 0]^T$ .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i = & \begin{bmatrix} -Y_6 - r_{yi} \\ X_6 + r_{xi} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} -c_1 b_{i2} \\ -s_1 b_{i2} \\ b_{i3} - v_{13} \end{bmatrix} \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} -c_1 b_{i4} \\ -s_1 b_{i4} \\ b_{i3} \end{bmatrix} \dot{q}_3 + \begin{bmatrix} -b_{i1y} \\ b_{i1x} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} b_{i5} + v_{81} \\ -b_{i6} + v_{91} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} b_{i5} \\ -b_{i6} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ & + \begin{bmatrix} c_1 b_{i7} \\ s_1 b_{i7} \\ b_{i8} - v_{14} \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 + \begin{bmatrix} -c_1 b_{i3} \\ -s_1 b_{i3} \\ b_{i8} \end{bmatrix} (2\dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_3^2), \quad i = 3, 4, 5, 6, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$X_6, Y_6,$  and  $v_{12}$  are given in Eq. (A.2), and  $b_{i2} = v_{12} + v_{14} + r_{zi}, b_{i3} = v_{31} + b_{i9}, b_{i4} = 2(v_{12} + r_{zi}), b_{i5} = s_1 b_{i4}, b_{i6} = c_1 b_{i4}, b_{i7} = v_{13} - b_{i3}, b_{i8} = v_{12} - r_{zi}, b_{i9} = s_1 r_{yi} + c_1 r_{xi}, v_{22} = v_{33} - s_{12}, v_{26} = v_{22} a_2, v_{24} = c_{12} - v_{32}, v_{32} = v_{24} a_2.$

$$\dot{\mathbf{v}}'_i = \begin{bmatrix} b_{i10} \\ b_{i11} \\ b_{i12} \end{bmatrix} \ddot{q}_4 + \begin{bmatrix} -b_{i11} \\ b_{i10} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} c_{23} r_{yi} - c_1 b_{i12} + v_4 v_9 \\ -c_{23} r_{xi} - s_1 b_{i12} - v_2 v_9 \\ b_{i13} + s_1 b_{i11} + c_1 b_{i10} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \begin{bmatrix} v_4 b_{i12} - s_{23} b_{i11} \\ s_{23} b_{i10} - v_2 b_{i12} \\ v_2 b_{i11} - v_4 b_{i10} \end{bmatrix} \dot{q}_4 \dot{q}_4, \tag{B.5}$$

$$b_{i10} = v_4 r_{zi} - s_{23} r_{yi}, b_{i11} = s_{23} r_{xi} - v_2 r_{zi}, b_{i12} = v_2 r_{yi} - v_4 r_{xi}, b_{i13} = v_3 r_{xi} - v_1 r_{yi}, i = 4, 5, 6.$$

$$\dot{\mathbf{v}}''_i = \begin{bmatrix} b_{i16} & b_{i15} & b_{i14} \end{bmatrix}^T \ddot{q}_5 + \begin{bmatrix} -b_{i15} \\ b_{i16} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + 2 \begin{bmatrix} -c_1 b_{i14} \\ -s_1 b_{i14} \\ b_{i17} - c_4 r_{zi} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2 \begin{bmatrix} v_4 b_{i14} - s_{23} b_{i15} \\ s_{23} b_{i16} - v_2 b_{i14} \\ v_2 b_{i15} - v_4 b_{i16} \end{bmatrix} \dot{q}_4 + \begin{bmatrix} v_{18} b_{i14} - v_{20} b_{i15} \\ v_{20} b_{i16} - v_{16} b_{i14} \\ v_{16} b_{i15} - v_{18} b_{i16} \end{bmatrix} \dot{q}_5 \dot{q}_5 \tag{B.6}$$

$$b_{i14} = v_{16} r_{yi} - v_{18} r_{xi}, b_{i15} = v_{20} r_{xi} - v_{16} r_{zi}, b_{i16} = v_{18} r_{zi} - v_{20} r_{yi}, b_{i17} = v_{20} (s_1 r_{xi} - c_1 r_{yi}), i = 5, 6$$

$$\dot{\mathbf{v}}_6^{cm} = \dot{\mathbf{v}}'_6 + \dot{\mathbf{v}}''_6 + \dot{\mathbf{v}}'''_6 + \begin{bmatrix} v_{35} \\ v_{36} \\ v_{37} \end{bmatrix} \ddot{q}_6 + \begin{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} -v_{36} \\ v_{35} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + 2 \begin{bmatrix} -c_1 v_{37} \\ -s_1 v_{37} \\ v_{70} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ + \begin{bmatrix} v_{48} r_{z6} - v_{49} r_{y6} + v_{61} \\ v_{49} r_{x6} - v_{47} r_{z6} + v_{62} \\ v_{47} r_{y6} - v_{48} r_{x6} + v_{63} \end{bmatrix} \dot{q}_4 + \begin{bmatrix} 2(v_{71} + v_{64}) + v_{67} \\ 2(v_{72} + v_{65}) + v_{68} \\ 2(v_{73} + v_{66}) + v_{69} \end{bmatrix} \dot{q}_5 + \begin{bmatrix} v_{67} \\ v_{68} \\ v_{69} \end{bmatrix} \dot{q}_6 \end{bmatrix} \dot{q}_6. \tag{B.7}$$

$a_{x6}, a_{y6},$  and  $a_{z6}$  are given in Eq. (A.2), and  $v_{35} = a_{y6} r_{z6} - a_{z6} r_{y6}, v_{36} = a_{z6} r_{x6} - a_{x6} r_{z6}, v_{37} = a_{x6} r_{y6} - a_{y6} r_{x6}, v_{47} = v_4 a_{z6} - s_{23} a_{y6}, v_{48} = s_{23} a_{x6} - v_2 a_{z6}, v_{49} = v_2 a_{y6} - v_4 a_{x6}, v_{61} = v_4 v_{37} - s_{23} v_{36}, v_{62} = s_{23} v_{35} - v_2 v_{37}, v_{63} = v_2 v_{36} - v_4 v_{35}, v_{64} = -(v_{18} a_{y6} + v_{20} a_{z6}) r_{x6}, v_{65} = -(v_{20} a_{z6} + v_{16} a_{x6}) r_{y6}, v_{66} = -(v_{16} a_{x6} + v_{18} a_{y6}) r_{z6}, v_{67} = a_{y6} v_{37} - a_{z6} v_{36}, v_{68} = a_{z6} v_{35} - a_{x6} v_{37}, v_{69} = a_{x6} v_{36} - a_{y6} v_{35}, v_{70} = s_1 v_{36} + c_1 v_{35}, v_{71} = (v_{20} r_{z6} + v_{18} r_{y6}) a_{x6}, v_{72} = (v_{16} r_{x6} + v_{20} r_{z6}) a_{y6}, v_{73} = (v_{18} r_{y6} + v_{16} r_{x6}) a_{z6}.$

Herein, the mass centre coordinates of the RL15 links in the coordinates of these links and its end effector are as follows:  $\hat{\mathbf{r}}_1^{cm} = [-0.086 \quad -0.1875 \quad -0.00012]^T, \hat{\mathbf{r}}_2^{cm} = [-0.4454 \quad 0.0283 \quad 0.0033]^T, \hat{\mathbf{r}}_3^{cm} = [0.00225 \quad 0.00017 \quad -0.7223]^T, \hat{\mathbf{r}}_4^{cm} = [0. \quad 0.212 \quad 0.00082]^T, \hat{\mathbf{r}}_5^{cm} = [0.0 \quad 0.027 \quad 0.007]^T, \hat{\mathbf{r}}_6^{cm} = [0.0 \quad 0.0 \quad 0.195]^T,$  and  $\hat{\mathbf{p}}_e = [0.12 \quad 0.12 \quad 0.35]^T.$

The vectors  $\mathbf{d}_{ik}$  and  $\mathbf{d}_{ikj}$  of the RL15 are calculated using Eqs. (7) and (B.1) as follows:

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{z1} \end{bmatrix}^T \ddot{q}_1, \tag{B.8}$$

$$\mathbf{N}'_i = \begin{bmatrix} -I_{xzi} \\ -I_{yzi} \\ I_{zi} \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + \begin{bmatrix} d_{i1} \\ -d_{i2} \\ -d_{i3} \end{bmatrix} \ddot{q}_2 + \begin{bmatrix} I_{yzi} \\ -I_{xzi} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} c_1 d_{i4} \\ s_1 d_{i4} \\ -2d_{i5} \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} c_1 d_{i3} \\ s_1 d_{i3} \\ d_1 I_{xyi} + d_{i6} \end{bmatrix} \dot{q}_2^2, \tag{B.9}$$

$d_1 = c_1^2 - s_1^2, d_{i1} = I_{xi} s_1 + I_{xyi} c_1, d_{i2} = I_{xyi} s_1 + I_{yi} c_1, d_{i3} = I_{xzi} s_1 - I_{yzi} c_1, d_{i4} = I_{xi} + I_{yi} - I_{zi}, d_{i5} = I_{xzi} c_1 + I_{yzi} s_1, d_{i6} = s_1 c_1 (I_{xi} - I_{yi}), i = 2, 3, 4, 5, 6$

$$\mathbf{N}''_i = \mathbf{d}_{i3} \ddot{q}_3 + \mathbf{d}_{i13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \mathbf{d}_{i23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \mathbf{d}_{i33} \dot{q}_3^2, \tag{B.10}$$

$$\mathbf{d}_{i3} = \mathbf{d}_{i2}, \mathbf{d}_{i13} = \mathbf{d}_{i12}, \mathbf{d}_{i23} = 2\mathbf{d}_{i22} \text{ and } \mathbf{d}_{i33} = \mathbf{d}_{i22} i = 3, 4, 5, 6$$

$$\mathbf{N}'''_i = \begin{bmatrix} d_{i7} & d_{i8} & d_{i9} \end{bmatrix}^T \ddot{q}_4 + \begin{bmatrix} 2I_{yzi} s_{23} - v_4 d_{i4} \\ v_2 d_{i4} - 2I_{xzi} s_{23} \\ 2d_{i10} \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} d_{i11} + v_4 d_{i3} + s_{23} d_{i2} - c_1 b_{i9} \\ d_{i12} + v_2 d_{i3} + s_{23} d_{i1} - s_1 d_{i9} \\ d_{i13} - v_4 d_{i1} - v_2 d_{i2} + s_1 d_{i8} + c_1 d_{i7} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \begin{bmatrix} v_4 d_{i9} + s_{23} d_{i8} \\ s_{23} d_{i7} - v_2 d_{i9} \\ v_2 d_{i8} - v_4 d_{i7} \end{bmatrix} \dot{q}_4 \dot{q}_4, \tag{B.11}$$

$$d_{i7} = I_{xi}v_2 - I_{xyi}v_4 - I_{xzi}S_{23}, \quad d_{i8} = I_{yi}v_4 - I_{xyi}v_2 - I_{yzi}S_{23}, \quad d_{i9} = I_{zi}S_{23} - I_{xzi}v_2 - I_{yzi}v_4, \quad d_{i10} = I_{xzi}v_4 - I_{yzi}v_2, \\ d_{i11} = I_{xi}v_1 - I_{xyi}v_3 - I_{xzi}C_{23}, \quad d_{i12} = I_{yi}v_3 - I_{xyi}v_1 - I_{yzi}C_{23}, \quad d_{i13} = I_{zi}C_{23} - I_{xzi}v_1 - I_{yzi}v_3, \quad i = 4, 5, 6.$$

$$\mathbf{N}_i'''' = \begin{bmatrix} d_{i14} \\ d_{i15} \\ d_{i16} \end{bmatrix} \ddot{q}_5 + \begin{bmatrix} d_{i18} - v_{18}d_{i4} \\ v_{16}d_{i4} - d_{i17} \\ 2d_{i19} \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} v_{20}d_{i2} - v_{18}d_{i3} - c_1d_{i16} + d_{i21} \\ v_{16}d_{i3} + v_{20}d_{i1} - s_1d_{i16} + d_{i22} \\ s_1d_{i15} + c_1d_{i14} - v_{16}d_{i2} - v_{18}d_{i1} + d_{i23} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ + \begin{bmatrix} d_{i24} + v_4d_{i16} - s_{23}d_{i15} + v_{18}d_{i9} - v_{20}d_{i8} \\ d_{i25} - v_2d_{i16} + s_{23}d_{i14} - v_{16}d_{i9} + v_{20}d_{i7} \\ d_{i26} + v_2d_{i15} - v_4d_{i14} + v_{16}d_{i8} - v_{18}d_{i7} \end{bmatrix} \dot{q}_4 + \begin{bmatrix} v_{18}d_{i16} - v_{20}d_{i15} \\ v_{20}d_{i14} - v_{16}d_{i16} \\ v_{16}d_{i15} - v_{18}d_{i14} \end{bmatrix} \dot{q}_5, \quad (\text{B.12})$$

$$d_{i14} = I_{xi}v_{16} - I_{xyi}v_{18} - I_{xzi}v_{20}, \quad d_{i15} = I_{yi}v_{18} - I_{xyi}v_{16} - I_{yzi}v_{20}, \quad d_{i16} = I_{zi}v_{20} - I_{xzi}v_{16} - I_{yzi}v_{18}, \\ d_{i17} = 2I_{xzi}v_{20}, \quad d_{i18} = 2I_{yzi}v_{20}, \quad d_{i19} = I_{xzi}v_{18} - I_{yzi}v_{16}, \quad d_{i21} = I_{xi}v_{38} - I_{xyi}v_{39} - I_{xzi}v_{40}, \\ d_{i22} = I_{yi}v_{39} - I_{xyi}v_{38} - I_{yzi}v_{40}, \quad d_{i23} = I_{zi}v_{40} - I_{xzi}v_{38} - I_{yzi}v_{39}, \quad d_{i24} = I_{xi}v_{41} - I_{xyi}v_{42} - I_{xzi}v_{43}, \\ d_{i25} = I_{yi}v_{42} - I_{xyi}v_{41} - I_{yzi}v_{43}, \quad d_{i26} = I_{zi}v_{43} - I_{xzi}v_{41} - I_{yzi}v_{42}, \quad i = 5, 6.$$

$$\mathbf{N}_6 = \mathbf{N}'_6 + \mathbf{N}''_6 + \mathbf{N}'''_6 + \mathbf{N}''''_6 + \mathbf{d}_{66}\dot{q}_6 + \mathbf{d}_{616}\dot{q}_1\dot{q}_6 + \mathbf{d}_{626}\dot{q}_2\dot{q}_6 + \mathbf{d}_{636}\dot{q}_3\dot{q}_6 + \mathbf{d}_{646}\dot{q}_4\dot{q}_6 + \mathbf{d}_{656}\dot{q}_5\dot{q}_6 + \mathbf{d}_{666}\dot{q}_6\dot{q}_6 \\ = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \ddot{q}_6 + \begin{bmatrix} d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \end{bmatrix} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{bmatrix} \dot{q}_4 + \begin{bmatrix} d_{14} \\ d_{15} \\ d_{16} \end{bmatrix} \dot{q}_5 + \begin{bmatrix} d_4a_{y6} - d_3a_{z6} \\ d_2a_{z6} - d_4a_{x6} \\ d_3a_{x6} - d_2a_{y6} \end{bmatrix} \dot{q}_6 \dot{q}_6, \quad (\text{B.13})$$

$$d_2 = I_{x6}a_{x6} - I_{xy6}a_{y6} - I_{xz6}a_{z6}, \quad d_3 = I_{y6}a_{y6} - I_{xy6}a_{x6} - I_{yz6}a_{z6}, \quad d_4 = I_{z6}a_{z6} - I_{xz6}a_{x6} - I_{yz6}a_{y6}, \\ d_5 = -I_{x6}a_{y6} - I_{xy6}a_{x6}, \quad d_6 = I_{xy6}a_{y6} + I_{y6}a_{x6}, \quad d_7 = I_{xz6}a_{y6} - I_{yz6}a_{x6}, \quad d_8 = I_{x6}v_{44} - I_{xy6}v_{45} - I_{xz6}v_{46}, \\ d_9 = I_{y6}v_{45} - I_{xy6}v_{44} - I_{yz6}v_{46}, \quad d_{10} = I_{z6}v_{46} - I_{xz6}v_{44} - I_{yz6}v_{45}, \quad d_{11} = I_{x6}v_{47} - I_{xy6}v_{48} - I_{xz6}v_{49}, \\ d_{12} = I_{y6}v_{48} - I_{xy6}v_{47} - I_{yz6}v_{49}, \quad d_{13} = I_{z6}v_{49} - I_{xz6}v_{47} - I_{yz6}v_{48}, \quad d_{14} = I_{x6}v_{50} - I_{xy6}v_{51} - I_{xz6}v_{52}, \\ d_{15} = I_{y6}v_{51} - I_{xy6}v_{50} - I_{yz6}v_{52}, \quad d_{16} = I_{z6}v_{52} - I_{xz6}v_{50} - I_{yz6}v_{51}.$$

$$\mathbf{I}_i^{\text{cm}} = \mathbf{D}_i \hat{\mathbf{I}}_i^{\text{cm}} \mathbf{D}_i^{\text{T}} = \begin{bmatrix} I_{xi} & -I_{xyi} & -I_{xzi} \\ -I_{xyi} & I_{yi} & -I_{yzi} \\ -I_{xzi} & -I_{yzi} & I_{zi} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{I}}_i^{\text{cm}} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I}_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{I}_{zi} \end{bmatrix}, \quad i = 1 \text{ to } 6. \quad (\text{B.14})$$

$\hat{\mathbf{I}}_i^{\text{cm}}$  is the  $3 \times 3$  constant moment-of-inertia matrix of link  $i$  about the link centre of mass in the coordinates of link  $i$ . Herein, only the principal moments of inertia  $\hat{I}_{xi}$ ,  $\hat{I}_{yi}$ , and  $\hat{I}_{zi}$  of the robot links with respect to the  $x$ ,  $y$  and  $z$  axes are considered, i.e. the cross products of inertia are neglected.

The moments of inertia around the  $x$ ,  $y$  and  $z$  axes, respectively and the masses of the RL15 links are  $\hat{I}_{y1} = 19$ ,  $\hat{I}_{x2} = 1$ ,  $\hat{I}_{y2} = 21.185$ ,  $\hat{I}_{z2} = 21.75$ ,  $\hat{I}_{x3} = 45$ ,  $\hat{I}_{y3} = 45.1$ ,  $\hat{I}_{z3} = 0.478$ ,  $\hat{I}_{x4} = 2.691$ ,  $\hat{I}_{y4} = 0.23$ ,  $\hat{I}_{z4} = 2.7$ ,  $\hat{I}_{x5} = 0.014$ ,  $\hat{I}_{y5} = 0.008$ ,  $\hat{I}_{z5} = 0.011$ ,  $\hat{I}_{x6} = 0.273$ ,  $\hat{I}_{y6} = 0.272$ , and  $\hat{I}_{z6} = 0.004 \text{ kgm}^2$ ,  $m_1 = 252$ ,  $m_2 = 86.2$ ,  $m_3 = 81$ ,  $m_4 = 45$ ,  $m_5 = 4.5$ , and  $m_6 = 11 \text{ kg}$ . Herein,  $\hat{I}_{x6}$ ,  $\hat{I}_{y6}$ ,  $\hat{I}_{z6}$ , and mass  $m_6$  relate to the structure of the link 6 and the end effector.

Appendix C

**Table C1**  
Computational complexity of presented  $O(n)$  forward dynamics algorithm applied to RL15.

Forward recursion		
Links	Terms based on equations and counts	Total counts
1 to 6	$r_1^{cm}:4M2A, r_2^{cm}:12M5A, r_3^{cm}:12M7A, r_4^{cm}:19M9A, r_5^{cm}:21M12A, r_6^{cm}:21M12A, \text{Eq. (4)}; p_e:9M6A, \text{Eq. (11)}; I_1:0M2A, I_2:2M3A, I_3:0M3A, I_4 = r_4^{cm}:0M0A, I_5 = r_5^{cm}:0M0A, I_6 = r_6^{cm}:0M0A, p_1^*:2M0A, p_2^*:3M0A, p_3^*:6M2A, \text{Eq. (19)}; I_1^{cm}:6M3A, I_2^{cm}:11M6A, I_3^{cm}:13M6A, I_4^{cm}:36M12A, I_5^{cm}:36M12A, I_6^{cm}:36M12A, \text{Eqs. (B.14)}$	109 M 63A
1	$b_{11}: 0M2A, b_{111}:0M0A, \text{Eq. (37)}$	0 M 2A
2	$b_{21}:3M2A, b_{22}:5M4A, b_{211}:0M0A, b_{212}:5M2A, b_{222}:2M0A, \text{Eq. (38)}$	15 M 8A
3	$b_{31}: 2M4A, b_{32}:4M3A, b_{33}:4M3A, b_{311}:0M0A, b_{312}:4M3A, b_{313}:2M2A, b_{322}:2M3A, b_{323}: 3M0A, b_{333}: 2M0A, \text{Eq. (39)}$	23 M 18A
4	$b_{41}: 0M2A, b_{42}:4M1A, b_{43}:3M1A, b_{44}:6M3A, \text{Eq. (41)}; b_{411}:0M0A, b_{412}:2M2A, b_{413}:2M0A, \text{Eq. (39)}; b_{414}:2M0A, \text{Eq. (41)}; b_{422}:2M3A, b_{423}:3M0A, b_{433}:2M0A, \text{Eq. (39)}; b_{424}:10M7A, b_{434}:0M0A, b_{444}:6M3A, \text{Eq. (41)}$	42 M 22A
5	$b_{51}: 0M2A, b_{52}:4M5A, b_{53}:3M1A, \text{Eq. (39)}; b_{54}:6M3A, \text{Eq. (41)}; b_{55}:6M3A, \text{Eq. (43)}; b_{511}:0M0A, b_{512}:2M2A, b_{513}:0M0A, \text{Eq. (39)}; b_{514}:2M0A, \text{Eq. (41)}; b_{515}:2M0A, \text{Eq. (43)}; b_{522}:2M3A, b_{523}:3M0A, \text{Eq. (39)}; b_{524}:10M7A, \text{Eq. (41)}; b_{525}:7M2A, \text{Eq. (43)}; b_{533}:2M0A, \text{Eq. (39)}; b_{534}:0M0A, \text{Eq. (41)}; b_{535}:0M0A, \text{Eq. (43)}; b_{544}:6M3A, \text{Eq. (41)}; b_{545}:9M3A, b_{555}:6M3A, \text{Eq. (43)}$	70 M 38A
6	$b_{61}:0M2A, b_{62}:4M3A, b_{63}:3M2A, \text{Eq. (39)}; b_{64}:6M3A, \text{Eq. (41)}; b_{65}:6M3A, \text{Eq. (43)}; b_{66}:6M3A, \text{Eq. (44)}; b_{611}:0M0A, b_{612}:2M2A, b_{613}:2M0A, \text{Eq. (39)}; b_{614}:2M0A, \text{Eq. (41)}; b_{615}:2M0A, \text{Eq. (43)}; b_{616}:2M0A, \text{Eq. (44)}; b_{622}:2M3A, b_{623}:3M0A, \text{Eq. (39)}; b_{624}:10M7A, \text{Eq. (41)}; b_{625}:7M2A, \text{Eq. (43)}; b_{626}:5M1A, \text{Eq. (44)}; b_{633}:2M0A, \text{Eq. (39)}; b_{634}:0M0A, \text{Eq. (41)}; b_{635}:0M0A, \text{Eq. (43)}; b_{636}:0M0A, \text{Eq. (44)}; b_{644}:2M1A, \text{Eq. (41)}; b_{645}:9M3A, \text{Eq. (43)}; b_{646}:18M12A, \text{Eq. (44)}; b_{655}:6M3A, \text{Eq. (43)}; b_{656}:27M15A, b_{666}:0M0A, \text{Eq. (44)}$	126 M 65A
1	$e_1:6M0A, \text{Eq. (13)}; e_{11}:2M0A, \text{Eq. (15)}$	8 M 0A
2	$e_2:9M5A, \text{Eq. (13)}; e_{21}:2M0A, e_{22}:3M0A, \text{Eq. (15)}$	14 M 5A
3	$e_3:18M13A, \text{Eq. (13)}; e_{31}:2M0A, e_{32}:3M0A, e_{33}:3M0A, \text{Eq. (15)}$	26 M 13A
4	$e_4:26M26A, \text{Eq. (13)}; e_{41}:2M0A, e_{42}:3M0A, e_{43}:3M0A, e_{44}:3M0A, \text{Eq. (15)}$	37 M 26A
5	$e_5:41M35A, \text{Eq. (13)}; e_{51}:2M0A, e_{52}:3M0A, e_{53}:3M0A, e_{54}:3M0A, e_{55}:3M0A, \text{Eq. (15)}$	55 M 35A
6	$e_6:59M50A, \text{Eq. (14)}; e_{61}:2M0A, e_{62}:3M0A, e_{63}:3M0A, e_{64}:3M0A, e_{65}:3M0A, e_{66}:3M0A, \text{Eq. (15)}$	76 M 50A
1	$d_1:0M0A, \text{Eq. (17)}; d_{11}:0M0A, d_{111}:0M0A, \text{Eq. (41)}$	0 M 0A
2	$d_2:6M3A, \text{Eq. (17)}; d_{21}:0M0A, d_{22}:6M3A, d_{211}:0M0A, d_{212}:5M3A, d_{222}:4M2A, \text{Eq. (47)}$	21 M 11A
3	$d_3: 11M9A, \text{Eq. (17)}; d_{31}: 0M0A, d_{32}: 6M3A, \text{Eq. (47)}; d_{33}: 0M0A, \text{Eq. (49)}; d_{311}:0M0A, d_{312}:5M3A, \text{Eq. (47)}; d_{313}:0M0A, \text{Eq. (49)}; d_{322}:4M3A, \text{Eq. (47)}; d_{323}:3M0A, d_{333}:0M0A, \text{Eq. (49)}$	26 M 18A
4	$d_4: 20M17A, \text{Eq. (17)}; d_{41}:0M0A, d_{42}:6M3A, \text{Eq. (47)}; d_{43}:0M0A, \text{Eq. (49)}; d_{44}: 9M6A, \text{Eq. (51)}; d_{411}:0M0A, d_{412}:2M2A, \text{Eq. (47)}; d_{413}:0M0A, \text{Eq. (49)}; d_{414}:9M3A, \text{Eq. (51)}; d_{422}:4M2A, \text{Eq. (47)}; d_{423}:3M0A, d_{433}:0M0A, \text{Eq. (49)}; d_{424}:19M16A, d_{434}:0M0A, d_{444}:6M3A, \text{Eq. (51)}$	78 M 52A
5	$d_5: 32M30A, \text{Eq. (17)}; d_{51}:0M0A, d_{52}:6M3A, \text{Eq. (47)}; d_{53}:0M0A, \text{Eq. (49)}; d_{54}: 9M6A, \text{Eq. (51)}; d_{55}:9M6A, \text{Eq. (53)}; d_{511}:0M0A, d_{512}:2M2A, \text{Eq. (47)}; d_{513}:0M0A, \text{Eq. (49)}; d_{514}:7M3A, \text{Eq. (51)}; d_{515}:8M3A, \text{Eq. (53)}; d_{522}:4M2A, \text{Eq. (47)}; d_{523}:3M0A, \text{Eq. (49)}; d_{524}:21M18A, \text{Eq. (51)}; d_{525}:19M16A, \text{Eq. (53)}; d_{533}:0M0A, \text{Eq. (49)}; d_{534}:0M0A, \text{Eq. (51)}; d_{535}:0M0A, \text{Eq. (53)}; d_{544}:6M3A, \text{Eq. (51)}; d_{545}:21M18A, d_{555}:6M3A, \text{Eq. (53)}$	153 M 113A
6	$d_6: 56M53A, \text{Eq. (17)}; d_{61}:0M0A, d_{62}:6M3A, \text{Eq. (47)}; d_{63}:0M0A, \text{Eq. (49)}; d_{64}: 9M6A, \text{Eq. (51)}; d_{65}:9M6A, \text{Eq. (53)}; d_{66}:9M6A, \text{Eq. (55)}; d_{611}:0M0A, d_{612}:2M2A, \text{Eq. (47)}; d_{613}:0M0A, \text{Eq. (49)}; d_{614}:7M3A, \text{Eq. (51)}; d_{615}:7M3A, \text{Eq. (53)}; d_{616}:6M3A, \text{Eq. (55)}; d_{622}:4M2A, \text{Eq. (47)}; d_{623}:3M0A, \text{Eq. (49)}; d_{624}:21M18A, \text{Eq. (51)}; d_{625}:19M16A, \text{Eq. (53)}; d_{626}:13M7A, \text{Eq. (55)}; d_{633}:0M0A, \text{Eq. (49)}; d_{634}:0M0A, \text{Eq. (51)}; d_{635}:0M0A, \text{Eq. (53)}; d_{636}:0M0A, \text{Eq. (55)}; d_{644}:6M3A, \text{Eq. (51)}; d_{645}:21M18A, \text{Eq. (53)}; d_{646}:15M9A, \text{Eq. (55)}; d_{655}:6M3A, \text{Eq. (53)}; d_{656}:27M15A, d_{666}:0M0A, \text{Eq. (55)}$	246 M 176A
Backward recursion		
6 to 1	$n'_{6c}:12M12A, \text{Eq. (56)}; n'_{5c}:6M9A, \text{Eq. (57)}; n'_{4c}:6M9A, \text{Eq. (58)}; n'_{3c}:12M24A, \text{Eq. (59)}; n'_{2c}:12M18A, \text{Eq. (60)}; n'_{1c}:4M6A, \text{Eq. (61)}$	52 M 78A
6 to 1	$n'_{6a1}:34M34A, \text{Eq. (52)}; n'_{5a1}:28M43A, \text{Eq. (63)}; n'_{5a1}:22M34A, \text{Eq. (64)}; n'_{3a1}:16M25A, \text{Eq. (65)}; n'_{2a1}:10M16A, \text{Eq. (66)}; n'_{1a1}:2M3A, \text{Eq. (67)}$	112 M 155A
6 to 1	$n'_{6a2}:0M0A; n'_{5a2}:0M0A; n'_{4a2}:0M0A; n'_{3a2}:22M33A, \text{Eq. (68)}; n'_{2a2}:16M24A, \text{Eq. (69)}; n'_{1a2}:4M8A, \text{Eq. (70)}$	42 M 65A
6 to 1	$n'_{6a3}:0M0A; n'_{5a3}:0M0A; n'_{4a3}:0M0A; n'_{3a3}:8M7A, \text{Eq. (71)}; n'_{2a3}:18M13A, \text{Eq. (72)}; n'_{1a3}:8M9A, \text{Eq. (73)}$	34 M 29A
6 to 1	$u_1:6M9A, u_2:20M22A, u_3:20M20A, u_4:27M15A, u_5:27M15A, u_6:27M15A, \text{Eqs. (40) and (41)}$	127 M 97A
	$\tilde{q}_j, j = 1 \text{ to } 6$ calculation: Solving linear system of Eq. (34) using Gaussian elimination	106 M 91A
		<b>TOTAL: 1735 M 1275A</b>

Appendix D. Dynamic coefficients related to actuator torques of RL15

Fig. A1(b) shows that the movement of link 2 of the RL15 causes the unwanted movement of link 3 (geometric coupling). For this reason, it is necessary to rotate the actuator rotor of link 3 when link 2 rotates. Consequently, the following is true

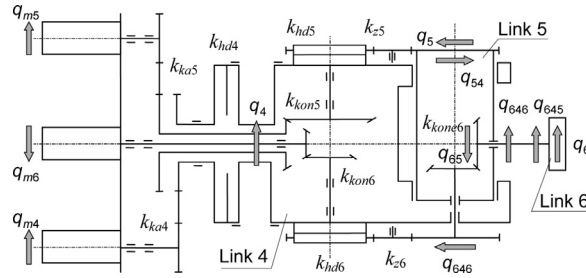


Fig. D1. Geometric coupling effects of movements of links 4, 5, and 6 of wrist of RL15.

$$q_{a3} = k_3 (q_3 + q_2/k_2). \quad (D.1)$$

Fig. D1 shows the geometric coupling effects of the movements of links 4, 5, and 6 of the wrist of the RL15. The figure indicates that the rotation of link 4 causes the unwanted rotation of link 5 (rotation  $q_{54}$ ) and the rotation of link 6 in two ways: through the gears of link 6 (rotation  $q_{646}$ ) and through the gears of link 5 (rotation  $q_{645}$ ). The rotation of link 5 causes the unwanted rotation of link 6 (rotation  $q_{65}$ ).

To prevent these undesirable movements of the robot links, it is necessary that when the rotor of actuator 4 rotates, the rotors of actuators 5 and 6 rotate as well. For the same reason, when actuator 5 rotates, actuator 6 has also to rotate. The gear ratios of the RL15 are  $k_1 = 120$ ,  $k_2 = k_3 = 119$ ,  $k_4 = k_{ka4}k_{hd4}$ ,  $k_5 = k_{ka5}k_{kon5}k_{hd5}k_{z5}$ ,  $k_6 = k_{kon6}k_{hd6}k_{z6}k_{kone6}$ ,  $k_{54} = k_{ka5}k_{64} = -1$ ,  $k_{65} = k_6$ ,  $k_{ka4} = k_{ka5} = 24/14$ ,  $k_{hd4} = 78$ ,  $k_{hd5} = 120$ ,  $k_{hd6} = 50$ ,  $k_{kon5} = k_{kon6} = 1.6$ ,  $k_{kone6} = 1$ , and  $k_{z5} = k_{z6} = 10/15$ . Consequently, the following is true

$$q_{a5} = k_5 q_5 + k_{54} q_4, \text{ and } q_{a6} = k_6 q_6 + k_{64} q_4 + k_{65} q_5. \quad (D.2)$$

The coefficients of the static and viscose friction are  $\mu_{s1} = \mu_{s2} = \mu_{s3} = \mu_{s4} = 0.22$ ,  $\mu_{s5} = 0.35$ ,  $\mu_{s6} = 0.21$ ,  $f_{v1} = f_{v2} = f_{v3} = 0.00025$ ,  $f_{v4} = f_{v6} = 0.002$ , and  $f_{v5} = 0.003$ , respectively.

When the coefficients of the static  $\mu_{s_i}$  and viscose  $f_{v_i}$  friction, gear ratio  $k_i$ , and actuator moment of inertia  $I_{a_i}$  are taken into account for the RL15, the coefficients  $u'_{ai}$  and  $h_{aij}$ , Eqs. (90)–(92), are

$$\begin{aligned} u'_{ai} &= [u'_i + \mu_{s_i} \text{sign}(\dot{q}_i) u_i] / k_i + k_i f_{v_i} \dot{q}_{i \text{prev}}, \quad i = 1, 2, 4, \\ u'_{a3} &= [u'_3 + \mu_{s3} \text{sign}(\dot{q}_3) u_3] u_3 / k_3 + k_3 f_{v3} (\dot{q}_{2 \text{prev}} / k_2 + \dot{q}_{3 \text{prev}}), \\ u'_{a5} &= [u'_5 + \mu_{s5} \text{sign}(\dot{q}_5) u_5] / k_5 + f_{v5} (k_{54} \dot{q}_{4 \text{prev}} + k_5 \dot{q}_{5 \text{prev}}), \\ u'_{a6} &= [u'_6 + \mu_{s6} \text{sign}(\dot{q}_6) u_6] / k_6 + f_{v6} (k_{64} \dot{q}_{4 \text{prev}} + k_{65} \dot{q}_{5 \text{prev}} + k_6 \dot{q}_{6 \text{prev}}), \\ h_{a11} &= h_{11} / k_1 + k_1 (I_{a1} + f_{v1} \Delta t), \quad i = 1, 2, 4, \\ h_{a32} &= h_{32} / k_3 + k_3 (I_{a3} + f_{v3} \Delta t) / k_2, \quad h_{a33} = h_{33} / k_3 + k_3 (I_{a3} + f_{v3} \Delta t), \\ h_{a54} &= a_{54} / k_5 + k_{54} (I_{a5} + f_{v5} \Delta t), \quad h_{a55} = h_{55} / k_5 + k_5 (I_{a5} + f_{v5} \Delta t), \\ h'_{a64} &= h_{64} / k_6 + k_{64} (I_{a6} + f_{v6} \Delta t), \quad h'_{a65} = h_{65} / k_6 + k_{65} (I_{a6} + f_{v6} \Delta t), \\ h'_{a66} &= h_{66} / k_6 + k_6 (I_{a6} + f_{v6} \Delta t). \end{aligned} \quad (D.3)$$

where  $h_{aij} = h_{ij} / k_i$ ,  $i = 1$  and  $j = 2, 3, 4, 5, 6$ , or  $i = 2$  and  $j = 1, 3, 4, 5, 6$ , or  $i = 3$  and  $j = 1, 4, 5, 6$ , or  $i = 4$  and  $j = 1, 2, 3, 5, 6$ , or  $i = 5$  and  $j = 1, 2, 3, 6$ , or  $i = 6$  and  $j = 1, 2, 3$ .

## Appendix E

Axes 1 and 3 of the RL15 are actuated with the motors whose maximum torque is 17.8 Nm. The maximum number of revolutions (MNR) is  $3150 \text{ min}^{-1}$ . Axis 2 has a motor with a maximum torque of 38.6 Nm and an MNR of  $2800 \text{ min}^{-1}$ . Axes 4, 5, and 6 have motors with a maximum torque of 3.47 Nm and an MNR of  $3400 \text{ min}^{-1}$ . The moments of inertia of the rotors and gearbox elements reduced to the rotors are  $I_{a1} = I_{a3} = 0.0042$ ,  $I_{a2} = 0.009$ ,  $I_{a3} = 0.0008$ ,  $I_{a5} = 0.001$ , and  $I_{a6} = 0.0007 \text{ kgm}^2$ .

## References

- [1] R. Featherstone, D. Orin, Dynamics, in: B. Siciliano, O. Khatib (Eds.), Handbook of Robotics, Springer-Verlag London Limited, 2016, pp. 35–65.
- [2] E. Otten, Inverse and forward dynamics: models of multi-body systems, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. B 358 (1437) (2003) 1493–1500.

- [3] R. Featherstone, D. Orin, Robot dynamics, equations and algorithms, in: Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), San Francisco, CA, 2000, pp. 24–28. 826–834.
- [4] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo, Dynamics, in: Robotics: Modelling, Planning and Control, Springer-Verlag London Limited, 2009, pp. 247–302.
- [5] M. Hirschkorn, J. Kövecses, The role of the mass matrix in the analysis of mechanical systems, *Multibody Syst. Dyn.* 30 (2013) 397–412.
- [6] M. Walker, D. Orin, Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms, *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Control* 104 (1982) 205–211.
- [7] M. Walker, D. Orin, Dynamics, in: M. Brady, J. Hollerbach, T. Johnson, T. Lozano-Perez, M. Mason (Eds.), Robot motion: Planning and Control, MIT Press, 1984, pp. 51–126.
- [8] M. Walker, Kinematics and dynamics, in: S.Y. Nof (Ed.), Handbook of Industrial Robotics, John Wiley and Sons, Inc., 1985, pp. 80–95.
- [9] L. Tsai, Dynamics of serial manipulators, in: Robot analysis: the Mechanics of Serial and Parallel Manipulators, John Wiley and Sons, Inc., 1999, pp. 372–423.
- [10] R. Featherstone, Rigid Body Dynamics Algorithms, Springer, 2008.
- [11] J. Hollerbach, A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.* 10 (11) (1980) 730–736.
- [12] J. Luh, M. Walker, R. Paul, On-Line computational scheme for mechanical manipulators, *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Control* 102 (2) (1980) 69–76.
- [13] H. Asada, Dynamics, in: Robot Analysis and Control, Wiley, 1986, pp. 93–132.
- [14] E. Dombre, W. Khalil, Dynamic modeling, in: Modeling, Performance Analysis and Control of Robot Manipulators, ISTE Ltd, 2007, pp. 40–59.
- [15] M. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar, Dynamics and multivariable control, in: Robot Dynamics and Control, Wiley, 2008, pp. 193–229. and 253–267.
- [16] M. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar, Dynamics, in: Robot Modeling and Control, Wiley, 2006, pp. 187–227.
- [17] R. Featherstone, Robot Dynamics Algorithms, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/Lancaster, 1987.
- [18] R. Featherstone, The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias position and velocity transformations between robot end effector coordinates and joint angles, *Int. J. Robot. Res.* 2 (1) (1983) 13–30.
- [19] E. Drumwright, Fast dynamic simulation of highly articulated robots with contact via  $O(n^2)$  time dense generalized inertia matrix inversion, in: I. Noda, N. Ando, D. Brugalí, J. Kuffner (Eds.), Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots, 7628, Springer, Berlin, Heidelberg, 2012, pp. 65–76. SIMPAR 2012, Lecture Notes in Computer Science.
- [20] V. Mata, S. Provenzano, F. Valero, J. Cuadrado, Serial-robot dynamics algorithms for moderately large numbers of joints, *Mech. Mach. Theory* 37 (8) (2002) 739–755.
- [21] R. Featherstone, Efficient factorization of the joint space inertia matrix for branched kinematic trees, *Int. J. Robot. Res.* 24 (6) (2005) 487–500.
- [22] Fijany, R. Featherstone, A new factorization of the mass matrix for optimal serial and parallel calculation of multibody dynamics, *Multibody Syst. Dyn.* 29 (2013) 169–187.
- [23] Lee, P. Chang, Efficient parallel algorithms for robot forward dynamics computation, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.* 18 (2) (1988) 238–251.
- [24] K. Bhalerao, J. Critchley, K. Anderson, An efficient parallel dynamics algorithm for simulation of large articulated robotic systems, *Mech. Mach. Theory* 53 (2012) 86–98.
- [25] O. Ibrahim, W. Khalil, Inverse and direct dynamic models of hybrid robots, *Mech. Mach. Theory* 45 (2010) 627–640.
- [26] S. Saha, A decomposition of the manipulator inertia matrix, *IEEE Trans. Robot. Autom.* 13 (2) (1997) 301–304 pp..
- [27] S. Saha, Analytical expression for the inverted inertia matrix of serial robots, *Int. J. Robot. Res.* 18 (1) (1999) 20–36.
- [28] S. Saha, Dynamics of serial multibody systems using the decoupled natural orthogonal complement matrices, *ASME J. Appl. Mech.* 66 (1999) 986–996.
- [29] S. Saha, Simulation of industrial manipulators based on the UDU<sup>2</sup> decomposition of inertia matrix, *Multibody Syst. Dyn.* 9 (2003) 63–85.
- [30] Mohan, S. Saha, A recursive, numerically stable, and efficient algorithm for serial robots, *Multibody Syst. Dyn.* 17 (4) (2007) 291–319.
- [31] S. Shah, S. Saha, J. Dutt, Modular framework for dynamics of tree-type legged robots, *Mech. Mach. Theory* 49 (2012) 234–255.
- [32] S. Shah, S. Saha, J. Dutt, Dynamics of tree-type robotic systems, intelligent systems, in: Control and Automation: Science and Engineering, Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013, p. 62. doi:10.1007/978-94-007-5006-7 1
- [33] W. Khan, V. Krovi, S. Saha, J. Angeles, Modular and recursive kinematics and dynamics for parallel manipulators, *Multibody Syst. Dyn.* 14 (2005) 419–455.
- [34] Raoofian, A. Kamali, A. Taghvaeipour, Forward dynamic analysis of parallel robots using modified decoupled natural orthogonal complement method, *Mech. Mach. Theory* 115 (2017) 197–217.
- [35] D. Guida, C.M. Pappalardo, Forward and inverse dynamics of nonholonomic mechanical systems, *Meccanica* 49 (7) (2014) 1547–1559.
- [36] W. Khan, C. Tang, V. Krovi, Modular and distributed forward dynamic simulation of constrained mechanical systems—A comparative study, *Mech. Mach. Theory* 42 (2007) 558–579.
- [37] M. Koul, S. Shah, S. Saha, M. Manivannan, Reduced-order forward dynamics of multiclosed-loop systems, *Multibody Syst. Dyn.* 31 (2014) 451–476.
- [38] S. Shah, S. Saha, J. Dutt, A new perspective towards decomposition of the generalized inertia matrix of multibody systems, *Multibody Syst. Dyn.* (2017), doi:10.1007/s11044-017-9581-8.
- [39] V. Kvrđić, J. Vidaković, M. Lutovac, G. Ferenc, V. Cvijanović, A control algorithm for a centrifuge motion simulator, *Robot. Comput.-Integr. Manuf.* 30 (4) (2014) 399–412.
- [40] V. Kvrđić, Z. Visnjic, V. Cvijanović, D. Divnić, S. Mitrović, Dynamics and control of a spatial disorientation trainer, *Robot. Comput.-Integr. Manuf.* 35 (2015) 104–125.
- [41] H. Pasic, R.L. Williams, C. Hui, A numerical algorithm for solving manipulator forward dynamics, *Mech. Mach. Theory* 34 (1999) 843–855.
- [42] M. Eisentraudt, S. Leyendecker, Fuzzy uncertainty in forward dynamics simulation, *Mech. Syst. Signal Process.* 126 (2019) 590–608.
- [43] J. Wu, J. Wang, Z. You, An overview of dynamic parameter identification of robots, *Robot. Comput.-Integr. Manuf.* 26 (5) (2010) 414–419.
- [44] J. Hollerbach, W. Khalil, M. Gautier, in: B. Siciliano, O. Khatib O (Eds.), Model identification, in Handbook of Robotics, Springer-Verlag, 2016, pp. 113–137. London Limited.
- [45] G. Gao, G. Sun, J. Na, Y. Guo, X. Wu, Structural parameter identification for 6 DOF industrial robots, *Mech. Syst. Signal Process.* 113 (2018) 145–155.
- [46] M. Díaz-Rodríguez, V. Mata, Á. Valera, Á. Page, A methodology for dynamic parameters identification of 3-DOF parallel robots in terms of relevant parameters, *Mech. Mach. Theory* 45 (2010) 1337–1356.
- [47] B. Armstrong-Helouvry, Friction in machine, in: Control of Machines with Friction, Kluwer, Boston, MA, 1992, pp. 7–42.